TIDSKRIFT
FÖR
ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

1932

TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM, C. O. G. BORELIUS,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

FEMTONDE ÅRGÅNGEN

1932

STOCKHOLM

REDAKTION OCH EXPEDITION: KARLBERGSVÄGEN 16IV

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI
1 9 3 2

Femtonde årgångens innehåll.

Sid.

AMINOFF, G. Några data ur modern geokemisk forskning 97, 156
ANDERSSON, J. Sannolikhetsräkning i äldre svenska läroböcker ... 161
— — Anm. av Jahrb. über die Fortschritte der Mathematik etc. 111
ARVIDSSON, C. G. A. Anm. av A. G. Carell och E. O. Edelstam, Lärobok i nautisk metereologi 169
ARVIDSSON, G. Wellenlängenmessungen in den höheren Funkenspektren von Blei und Wismut im äussersten Ultraviolett (ref. av grudualavh.) 53
BECKMAN, ANNA. Anm. av A. S. Eddington, Den materiella världens väsende 43
BENGTSSON-KNAVE, E. Über die Brandenspektren einiger Metallhydride (ref. av gradualavh.) 179
BERGFELT, A. Huru jag undersökte skolans besinmotor..... 222
BERGHOLM, C. Kopplingstavla för växelström 225
BERNTON, A. Beiträge zur Kenntnis der optisch aktiven Thiomilchsäuren etc. (ref. av gradualavh.)..... 178
BLOM, C. E. Anm. av Eva Ramstedt, Marie Curie och radium 115
— — Anm. av Moll-Rudberg, Lärobok i fysik II..... 237
BÄCKSTRÖM, H. Några nyare ljuskällor för olika ändamål..... 229
DEVIK, OLAF. Temperaturstrålingens energifordeling. En oversikt over de teoretiske synspunkter..... 86, 148
EDQVIST, T. Fysikaliska uppgifter..... 245
EKEFORS, E. Vakuumfunkspektren von Kalium und Calcium im Gebiete 100 bis 1100 Å (ref. av gradualavh.)..... 52
ENSKOG, D. Anm. av Isaac Newton, Naturvetenskapens matematiska principer 44
FORSSTRÖM, G. En ny polvåg för härledning av Coulombs lag..... 19
FRIMAN, E. Anm. av Sigurd Eriksson, Lärobok i matematik för tekniska läroverk..... 45
GÖRANSSON, E. Sannolikhetsräkning på empirisk grundval (forts.) 7. Tillägg..... 1, 65, 129
— — Sannolikhetsräkning i äldre svenska läroböcker..... 161

GUSTAVER, B. Ett enkelt sätt att avlägsna kvicksilverdroppar ur golvspringor 37
— — Anm. av N. E. Persson, Lärjungeförsök i kemi för folkskolan 176
HEDESTRAND, G. Studien über amphotere Elektrolyte (ref. av gradualavh.) 180
HEDSTRÖM, J. S. Om rationella värden på sidor och diagonaler i en parallellogram 26
— — Anm. av Naturforskaren, organ för naturvetenskapligt intresserad svensk ungdom 118
HEIMER, A. En överskådlig elektrisk kopplingstavla 29
HENNICHS, S. Anm. av J. Lundberg, Handledning vid laborationer i kemi på gymnasiet 116
— — Anm. av Böös-Lundberg, Lärobok i kemi för gymnasiet 170
— — Anm. av I. Bolin och B. Gustaver, Kemi för gymnasiet 172
HÄGG, G. Irving Langmuir, Nobelpristagare i kemi 1932 193
HÖSSJER, G. Om införandet av logaritmer 140
JENVALL, A. Anm. av C. Rendahl och B. Söderborg, Astronomi 47
KARLSSON, K. G. Newtons ringar som elevlaboration 227
LILJESTRÖM, A. Anm. O. P. Arvesen, Innføring i Nomografi 112
LUNDAHL, C. Förslag till uppgifter för enskilt arbete i astronomi 32, 162
LUNDBLAD, R. Anm. av W. N. Bond, Numerical Examples in Physics 168
— — Fysikaliska uppgifter 245
MEBIUS, C. A. Om heltalsvärden på sidor och diagonaler i en parallellogram 200
NYSTRÖM, B. E. Anm. av S. Nydell, Matematiska uppgifter givna i provskrivningar vid tekniska läreverk 46
NYDELL, S. Prismoidformeln 209
— — Anm. av H. Bohlin, Elektrotekniska grundbegrepp och tillämpningsövningar 235
PERSSON, P. G. Anm. av C. E. Sjöstedt, Projektiv geometri 231
— — Anm. av C. E. Sjöstedt, Geometriska uppgifter och lösningsmetoder 232
PETRINI, H. Parallellaxiomet för en yta av ändlig utsträckning ... 204
SEBELIUS, H. Efterrinning vid tömning av byretter och pipetter... 219
SJÖSTEDT, C. E. Anm. av A. Wahlgren, Apollonius' tre första böcker om kägelsnitten 167
SJÖSTRÖM, M. Anm. av Kosmos, bd 9 47
STARCK, G. Elektrolyters ledningsförmåga. Ett laborationsförsök 38
— — 1932 års atomvikter 159

STARCK, G. Den direkta syntesen av klorväte 215
— — Anm. av Elsie Hultén, En kolatoms öden..... 114
— — Anm. av Gerard de Geer, Järnet i Sveriges näringsliv ... 236
— — Anm. av H. Rémy, Lehrbuch der anorganisehen Chemie... 237
STENVALL, A. Den regelbundna 34-hörningen..... 78
SUNDQVIST, J. Anm. av Elektroteknikens grunder etc..... 46
SVENONIUS, H. Några egenskaper hos fosfor..... 40
TEGNÉR, H. »Katt och råtta» (forts.) 13
WALLENQUIST, Å. An attempt to determine photovisiual magnitudes etc. (ref. av gradualavh.) 56
WERNER, C. S. Anm. av Olaf Eriksson, Uppgifter i fysik givna i provskrivningar vid tekniska läroverk 233
— — Anm. av G. Juel og E. Vollset. Fysikk-opgaver for gymnasiet 234
WETTERBLAD, Fysikaliska uppgifter 245

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1931—32 182
Föreläsningar för lärarkandidaterna vid provårsläroverken 1931—32 182
Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna v. t. och h. t. 1932 ..... 123, 251
Provräkning i realskolexamen v. t. och h. t. 1932 ..... 127, 255
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. BÅGMAN) 60, 119, 185, 241
— —: Fysikaliska uppgifter (förf. av R. LUNDBLAD, T. WETTERBLAD, T. EDQVIST, och C. E. B.) 245
— —: Resultat av 1932 års pristävlan, med lösningar 189
Gradualavhandlingar (autoreferat) ERIK EKEFORS (52), GUSTAF ARVIDSSON (53), ÅKE WALLENQUIST (56), ALLAN BERNTON (178), ERNST KNAVE (179), GUNNAR HEDESTRAND (180)
Översikt av innehållet i följande tidskrifter: Populär astronomisk tidskrift, Svensk kemisk tidskrift, Era, Industritidningen Norden, Radioamatören, The L. M. Ericsson Review, Matematisk Tidsskrift (København), Fysisk Tidsskrift (København), Norsk Matematisk Tidsskrift (Oslo), Den Höiere Skole (Oslo) 57, 183, 239
Bokanmälningar: EDDINGTON, Den materiella världens väsende; NEWTON, Naturvetenskapens matematiska principer; ERIKSSON, Lärobok i matematik för tekniska läroverk; Matematiska uppgifter givna i provskrivningar vid tekniska läroverk; Elektroteknikens grunder; RENDAHL-SÖDERBORG, Astronomi; Kosmos, Fysiska uppsatser; Uppfinningarnas bok, Del VI; »Från Kunskapens fält»; ALTHIN, Flygkrönika; Lindståhls tekniska bokkatalog 1931 43

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik; Revue semestrielle des publications mathématiques; ARVESEN, Inføring i Nomografi; HULTÉN, En kolatoms öden; RAMSTEDT, Marie Curie och radium; LUNDBERG, Handledning vid laborationer i kemi på gymnasiet; Naturforskaren, organ för naturvetenskapligt intresserad svensk ungdom 111

WAHLGREN, Appollonius' tre första böcker om kägelsnitten; BOND, Numerical Examples in Physics; CARELL-EDELSTAM, Lärobok i nautisk meteorologi; BÖÖS-LUNDBERG, Lärobok i kemi för gymnasiet; BOLIN-GUSTAVER, Kemi för gymnasiet; PERSSON, Lärjungeförsök i kemi för folkskolan 167

SJÖSTEDT, Projektiv geometri; SJÖSTEDT, Geometriska uppgifter och lösningsmetoder; ERIKSSON, Fysikuppgifter givna i provskrivningar vid tekniska läroverk; JUEL-VOLLSET, Fysikk-opgaver for gymnasiet; BOHLIN, Elektrotekniska grundbegrepp och tillämpningsövningar; DE GEER, Järnet i Sveriges näringsliv; RÉMY, Lehrbuch der anorganischen Chemie; MOLL-RUDBERG, Lärobok i fysik; FALKENHAGEN, Elektrolyte; Daedalus, Tekniska Museets årsbok; Kalendrar för 1933..... 231

Insänd litteratur från följande utgivare:

M. Bergwall, A. Bonnier, A/B L. M. Ericsson, C. E. Fritze, Kooperativa Förbundet, P. A. Norstedt & Söner, Seelig & C:o, Svenska Bokförlaget, Tidens förlag, Ingenjörsvetenskapsakademien, Statens Meteorologiska Anstalt, Kungl. Telegrafverket, Astronomiska Sällskapet, Sveriges Elektricitetsverksförening, m. fl. (Era), Läroverkslärarnas Riksförbund, Industritidningen Norden, Pedagogisk Tidskrift, alla i Stockholm. Wisénska Bokhandeln, Östersund; Henrik Carlssons Bokhandel, Linköping; Almqvist & Wicksell, Uppsala; Radioamatören, Göteborg; Norsk matematisk Forening, Oslo; H. Aschehoug & C:o, Oslo; Matematisk Forening, København; Selskabet for Naturlærens Udbredelse, København; J. Gjellerup, København; Pedagogisk Förening för Finland, Helsingfors; Walter de Gruyter & C:o, Berlin.

Rättelse.

Sid. 134 fig. 14 står $x_1 + x_2 = na$, bör vara $x_1 + x_2 = 2na$.

Tidskr. utkommer med fyra 64-sidiga häften årligen (mars, juni, sept., dec.). Pris per häfte 2: 25, per årgång kr. 8: —. Subskription genom inbetalning av kr. 8: — på postgirokonto n:r 52755.

Redaktion och expedition: **Adjunkt C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16[IV], Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

Sannolikhetsräkning på empirisk grundval.

Av EDVARD GÖRANSSON.

7. Tillägg.

Bevis för riktigheten av formeln

$$(1) \qquad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}.$$

Åt den föregående framställningen har givits en sådan form, att läsaren utan tillgång till litteratur och utan att verkställa några räkningar skall kunna tillgodogöra sig innehållet. I detta syfte ha ock efter hand införts tabeller över normala sannolikhets- och fördelningsfunktionerna (1931: 2, sid. 73 och 1931: 4, sid. 212). Den sistnämnda tabellen har kommit till användning redan i häft. 1931: 1, sid. 21. I ett fall har emellertid avvikelse från nämnda grundsats ägt rum, nämligen beträffande beviset för formeln (1). Ifrågavarande integral möter vid flera tillfällen, första gången redan i den första uppsatsen årg. 13: 4 år 1930, sid. 201. Den enklaste härledningen torde vara följande.[1]

Skriver man uttrycket för I ännu en gång men med variabelbeteckningen v, erhåller man genom multiplikation

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\, dv = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv.$$

[1] RICHARD V. MISES, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, Leipzig und Wien, Franz Deuticke 1931, sid. 42. Arbetet utgör band I av Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik.

Den sista integralen kan uppfattas som en ytintegral i ett rätvinkligt koordinatsystem u, v. Om man övergår till polära koordinater genom att sätta $u^2 + v^2 = r^2$ och ersätta ytelementet $du\,dv$ med $r\,dr\,d\vartheta$ samt slutligen i stället för r^2 inför en ny variabel z, så erhålles

$$I^2 = \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\vartheta = \tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-z}\,dz \int_0^{2\pi} d\vartheta = -\tfrac{1}{2} \Big|_0^{\infty} e^{-z} \cdot 2\pi = \pi,$$

varmed formeln (1) är bevisad.

Sannolikhetsbegreppet. I en uppsats i denna tidskrift (1931: 2, sid. 77), *Sannolikhetsräkning och allmänbildning,* omtalar lektor Petrini, att vid universitetet i Uppsala tidigare hållits två kurser i sannolikhetsräkning, den ena på 1880- och den andra på 1890-talet. Vid den förra framhölls, så vitt jag vet, att probabilitetskalkylen vid denna tid nästan råkat i glömska och att denna del av matematiken ännu bidade sin Weierstrass för att bringa reda i de grundläggande principerna. Föreläsningen inskränkte sig i huvudsak till kombinationsteori och inleddes med variationer och permutationer. En del roande uppgifter behandlades. Som exempel på anagram anfördes: *quid est veritas,* som genom omflyttning av bokstäver övergår i *est vir qui adest* samt Hooke's grundläggande sats för elasticitetsteorien *ut tensio sic vis,* vilken på grund av den tidens brist på tidskrifter, för att skydda prioritetsrätten, i ett tidigare arbete år 1675 angavs genom anagrammet *ceiiinosssttvu.* Någon sannolikhetsräkning i egentlig mening torde knappast hava förekommit vid ifrågavarande kurs. Problem, som behandla invecklade kortspel o. d., taga ofta ett stort utrymme i framställningar rörande sannolikhetsräkningar. Dylika uppgifter tillhöra närmast kombinationsteorien.[1]

Först i våra dagar synes sannolikhetsbegreppet hava blivit på ett rationellt sätt klargjort av R. v. Mises dels genom det ovan anförda arbetet, som utgör en utförlig lärobok i

[1] Paul Lévy, Calcul des probabilités, Paris, Gauthier-Villars, 1925.

ämnet, dels genom ett tidigare arbete av kunskapsteoretisk art med titeln Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit.[1]

Den klassiska definitionen, som härrör från LAPLACE i hans Essai philosophique des probabilités år 1814, företräder en aprioristisk uppfattning och lyder enligt lektor OHLONS förut anförda arbete: sannolikheten för en händelse är ett bråk, som utgör kvoten mellan antalet gynnsamma fall och antalet lika möjliga fall. I förordet framhåller OHLON, att svårigheterna äro stora i fråga om fixerandet av antalet gynnsamma fall och antalet lika möjliga fall. LAPLACE's auktoritet har gjort att först v. MISES vågat uttala, att här föreligger en petitio principii, då orden »lika möjliga» endast är ett annat uttryck för »lika sannolika». Denna definition kan exempelvis icke tillämpas på en »falsk» tärning och ej heller på dödligheten. Enligt 1921—25 års allmänna dödlighetstabell (jämför denna tidskrift 1931: 3, sid. 139) är sannolikheten för en 40-årig man att dö inom ett år 0.0053. Vilka äro här de gynnsamma och de lika möjliga fallen? Är det 10 000 lika möjligheter, av vilka 53 äro gynnsamma för dödens inträdande, eller är det 30 000 med 159 gynnsamma fall? En person, som på skolbänken fått inpräntad den klassiska definitionen på sannolikhet och alltså har klart för sig, att talet $^1/_6$ anger sannolikheten för att med en tärning slå exempelvis en tvåa, kommer förmodligen att säga, att sannolikheten för den 40-årige hr A. att dö inom 1 år är 0.0053, och att sannolikheten för den 30-åriga småskollärarinnan fröken P. att avgå från sitt yrke inom 1 år är 0.039 (jfr denna tidskrift 1931: 2, sid. 71). Dylika uttalanden äro meningslösa och skulle varit omöjliga, om vederbörande haft klart för sig, att sannolikheten är ett statistiskt frekvenstal, som gäller endast kollektivt.[2] v. MISES

[1] Wien, Julius Springer 1928, utgör band 3 av Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung.

[2] KARL ENGLUND, Kritiska betraktelser över aktuarievetenskapen, Nordisk försäkringstidskrift 1931, häfte 1.

förklarar saken så, att när man kommit så långt i läroböckerna, att det är tal om dödssannolikheter o. d., har man för länge sedan glömt, att alla satser och regler i sannolikhetsräkningen hava härletts med utgångspunkt från teorien om lika gynnsamma och lika möjliga fall.

För mera än ett kvarts sekel sedan åhörde jag undervisningen vid några tyska läroanstalter. Vid tre av dessa sysslade man — i en klass motsvarande den näst högsta eller högsta av våra gymnasieringar — med att av kända sannolikheter härleda andra. Man talade om en »Wahrscheinlichkeit des Entweder-oder» och en »Wahrscheinlichkeit des Sowohl-als-auch». Aldrig kunde jag föreställa mig, att sådana tillsynes relativt enkla saker skulle vålla lärjungarna så många svårigheter (mer än en fick heta Schafskopf), och jag gladde mig över att vi i de svenska skolorna voro förskonade från dylikt. — Med lektor Ohlons formulering lyder den första av dessa satser: sannolikheten för att *antingen* den ena *eller* den andra av flera händelser skall inträffa, är summan av dessa händelsers sannolikheter, förutsatt att ej några av dessa händelser kunna inträffa samtidigt. v. Mises visar upp bristfälligheten i satsens formulering med ett par exempel. Sannolikheten för en 40-årig man att dö inom ett år är 0.0053. Sannolikheten för en 41-årig att inom ett år ingå äktenskap är 0.009. Trots att möjligheterna utesluta varandra, är det likväl självfallet orimligt att påstå, att sannolikheten för en 40-årig man att antingen dö inom ett år eller ingå äktenskap efter ytterligare ett år är $0.0053 + 0.009 = 0.0143$. — Ett annat exempel av samma art är följande. En skicklig tennisspelare har i en bestämd tävling i Berlin utsikt att vinna 80 på 100. I en samtidigt pågående tävling i New York är sannolikheten, att han skall segra, 70 på 100. Möjligheterna utesluta varandra, men påståendet att sannolikheten för att han skall segra antingen i Berlin eller New York är 1.50, vore naturligtvis alldeles vanvettigt. Felet består däri, att man förbiser, att

sannolikheterna för olika tilldragelser få adderas endast under förutsättning att de tillhöra samma kollektiv.

Av det anförda framgår, att den laplace'ska definitionen är oduglig, när det gäller praktiska tillämpningar. Av denna anledning definieras också sannolikheten som ett statistiskt frekvenstal. Mellan de två definitionerna, frekvens- och likamöjlighetsdefinitionen, sökte man finna en brygga och trodde sig ha funnit en sådan i Poissons »de stora talens lag», som framställdes i hans Recherches sur la probabilité des jugements (1837). Enligt v. Mises föranledde Poissons arbete ökad förvirring, därför att det är två satser, åt vilka Poisson ger namnet »de stora talens lag», den ena: den relativa frekvensen hos en tilldragelse närmar sig vid fortsatt upprepande av försöket allt mer ett visst gränsvärde; den andra: när det är fråga om ett enkelt alternativ-försök, som upprepas n gånger, och p är sannolikheten för ett positivt resultat samt ε är ett godtyckligt litet tal, så går sannolikheten för att försöket minst $pn - \varepsilon n$ gånger och högst $pn + \varepsilon n$ gånger utfaller positivt mot 1 vid växande värden på n. Antag exempelvis, att det är fråga om att med ett mynt spela krona eller klave. Av 100 kast finns det en viss sannolikhet p för att 49 till 51 kast skola utvisa krona; kastar man 1000 gånger, är sannolikheten för att antalet gånger, då krona skall komma upp, skall ligga mellan 490 och 510, större; och ännu större att vid 10 000 kast kronan skall komma upp mellan 4 900 och 5 100 gånger. Här är $p = 1/2$ och $\varepsilon = 0.01$. Poissons sats är en generalisation av en sats av Jacob Bernoulli (1713) och har i sin ordning generaliserats av Tschebyscheff.

Det är Poissons senare sats, som man i allmänhet kallar de stora talens lag, och man anså, att denna kan bevisas med tillhjälp av den förstnämnda lagen (att frekvenstalet närmar sig ett gränsvärde), vilken antages vara ett postulat. Hur man förmenade att bryggan mellan Laplace's definition och frekvensdefinitionen skulle fungera, antydes exempelvis i Ruben Mattsons lärobok i al-

gebra.[1] Emellertid visar v. Mises upp, att härledningen av Poissons teorem är oriktig och att man måste stödja sig på en annan erfarenhetssats (satsen om den fullständiga regellösheten), till vilken vi återkomma i det följande.

Redan i mitten av 1800-talet uppstod i England en radikal riktning, representerad av Ellis m. fl., som utgår från det statistiska frekvenstalet. Då denna icke ledde till påföljd, uppstod (så stor var Laplace's auktoritet) ett empiriskt motstycke till den klassiska aprioristiska sannolikhetsräkningen nämligen Th. Fechners »Kollektivmasslehre» utgiven efter författarens död år 1897. Astronomen H. Bruns sökte sedermera förena de båda läroområdena. Trots bemödanden av framstående forskare att utforma en sannolikhetskalkyl, som utan att helt lämna den klassiska teoriens grundläggande principståndpunkt, skulle tillfredsställa anspråk på matematisk skärpa och omfatta statistiska och andra tillämpningar, kan en enhetlig och allmänt erkänd teori knappast sägas ha framkommit.[2] Ännu så sent som år 1931 föreslår dr Karl Englund,[3] att man skall använda olika namn på de s. k. matematiska sannolikheterna och de statistiska sannolikheterna, vilka enligt Englunds mening äro till sitt väsen så skilda, att de icke böra sammanföras till ett begrepp.

Genom v. Mises inlägg i frågan har sannolikhetsräkningen förvandlats till en *naturvetenskaplig* teori, som icke känner någon skillnad mellan »aprioristisk sannolikhetsräkning» och »empirische Kollektivmasslehre». De förutsättningar, varifrån v. Mises utgår äro 1) förefintligheten av ett kollektiv (jfr Fechner), varmed förstås en obegränsat fortsättningsbar tänkt följd av företeelser, var och en försedd med ett kännetecken (röd eller svart, 0 eller 1 eller 2,

[1] Mattson, Lärobok i algebra för gymnasiet III, sid. 288, andra upplagan, Stockholm, Norstedt & Söner, 1928.

[2] Se Cramérs förut citerade arbete Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar, sid. 65 ff.

[3] Englund, loc. cit. sid. 19.

ja eller nej o. s. v.); 2) kollektivet skall vara regellöst, d. v. s. man erhåller samma gränsvärde på frekvenstalet i fråga, om man medtager alla företeelserna, eller endast vissa, valda efter en viss regel, t. ex. alla med jämnt ordningsnummer, varje vars ordningsnummer är primtal, o. s. v.; 3) det för det i mom. 2 nämnda urvalet okänsliga gränsvärdet på frekvenstalet kallas sannolikheten för förekomsten av ett visst kännemärke inom det ifrågavarande kollektivet.

Den i mom. 2 nämnda regellöshetsprincipen benämnes ock principen för omöjligheten av ett spelsystem, d. v. s. i fråga om hasardspel omöjligheten att finna ett system, som medför vinst. Principen ifråga har gentemot erfarenheten samma ställning som principen om omöjligheten av ett perpetuum mobile, vilken är ekvivalent med axiomet om energiens oförstörbarhet.

Det är tydligt, att man med utgångspunkt från detta rationella sannolikhetsbegrepp icke kan upptaga sådana frågor som exempelvis sannolikheten för de bibliska underverken, sannolikheten för en viss läsart hos t. ex. Tacitus. Uteslutna äro ock enligt v. Mises[1] nästan alla frågor rörande »sciences morales» över vilka Laplace så fängslande talar i sin »essai philosophique».

v. Mises framkastar på grund härav den tanken, att man borde ge åt den vetenskapliga sannolikhetskalkylen ett annat namn. Emellertid hänvisar v. Mises till analogien med begreppet *arbete*, vilket inom vetenskapen definieras som produkten av kraft och väg eller noggrannare som linjeintegralen av kraften, men som i det dagliga livet har en mångskiftande betydelse. Namnet sannolikhet skulle i överensstämmelse härmed kunna behållas även för det rationella begreppet.

1909 års undervisningsplan för gymnasiet (S. F. nr 28, sid. 1). I 1928 års undervisningsplan (S. F. nr 252) upptages under rubriken kursfördelning i matematik »enkla exempel på sannolikhetsräkning» för såväl latin- som real-

[1] Anförda arbetet av år 1928 sid. 10.

linjen. I den förut gällande undervisningsplanen gick man annorlunda tillväga i fråga om kursmoment, som kunde inläggas i redan omnämnda delar av kursen men vilkas betydelse man ansåg böra särskilt understrykas. Några exempel härpå må anföras.

Under sin mångåriga verksamhet som censor (åren 1880—1908) brukade professor C. F. E. Björling giva metodiska impulser åt vederbörande lärare. Han betonade vikten av att de unga tillhöllos att räkna rätt och offentliggjorde i Pedagogisk Tidskrift år 1905, sid. 77, en uppsats om niometoden, vilken borde beaktas och framhållas mera, än dittills syntes hava varit händelsen. Vidare uttalade han vid ett par tillfällen, att binomialteoremet med hel positiv exponent borde genomgås, ävensom talsystemets successiva utveckling från hela positiva tal till brutna och irrationella tal samt vidare till negativa och imaginära. Allt detta beaktades också i undervisningsplanen, men icke på det sättet att det inordnades i kursfördelningen såsom enkla exempel ur talteorien eller dylikt i analogi med 1928 års undervisningsplan beträffande sannolikhetsräkningen, utan det kom till uttryck i de metodiska anvisningarna under rubriken algebra, punkt 6, till vilken jag tillåter mig hänvisa.

Vad beträffar det specialfall av binomialsatsen, varom här är fråga, så måste det tillerkännas betydelse som en mycket viktig formell relation, även om man icke i likhet med 1901 års preussiska undervisningsplan är böjd att beteckna denna formel såsom »Krone des arithmetischen Unterrichts». Man har här osökt anledning att ingå på läran om kombinationer och härleda satsen i fråga medelst några enkla kombinatoriska formler samt slut från n till $n + 1$. Lärjungen lär sig alltså härigenom känna den fullständiga induktionen.

Vad som inhämtats om kombinationer bör enligt min mening icke i skolan förbindas med den klassiska sannolikhetsräkningen. Däremot ger det, som i de metodiska anvisningarna för gymnasiet anföres under rubriken funk-

tionsbegreppet, osökt anledning att gå in på sannolikhetsbegreppet som ett frekvenstal. I nämnda anvisningar framhålles lämpligheten av att upptaga till behandling en eller annan statistisk fråga. Lärjungen kommer snart under fund med att om kurvan skall fortlöpa kontinuerligt, måste man förfoga över stora tal. Utan svårighet kommer man till frekvensbegreppet (jag talar av egen erfarenhet om latingymnasiet från en tid, då läroböcker ännu saknades). Frekvenstal, som framgått från ett visst fall, tillämpas på andra likartade, förutsatt att man har att göra med tillräckligt stort material. (Dödlighets-, invaliditets-, insjuknandefrekvens etc.). Om man utbyter namnet frekvenstal mot sannolikhet, är skäligen likgiltigt.

Av det anförda framgår, att redan 1909 års undervisningsplan gav läraren anledning att, visserligen i mycket begränsad utsträckning, inlåta sig på frågor rörande kombinatorik och sannolikhet, sistnämnda begrepp, fattat som ett statistiskt frekvenstal. Någon anledning att nu gå längre torde knappast föreligga. Måhända är det lämpligt att i de metodiska anvisningarna särskilt omnämna dessa saker.

Syftet med sannolikhetsräkningens införande å gymnasiet. I den förut anförda uppsatsen framhåller lektor Petrini vikten för den högre allmänbildningen att äga kännedom om slumpens lagar, då den moderna teoretiska fysiken tenderar att bygga hela kausalitetsprincipen på dessa. I själva verket förhåller sig saken så, att med det gamla betraktelsesättet gör man anspråk på att med utgångspunkt från vissa förutsättningar kunna exakt beräkna resultatet av ett fenomen (t. ex. en planets läge vid en viss tidpunkt med kännedom om förhållandena vid en annan tidpunkt eller den riktning, som en ljusstråle får vid övergång från ett medium till ett annat), under det att den statistiska teorien gör ett uttalande om vad som vid ett tillräckligt ofta upprepat försök kommer att i genomsnitt inträffa. Det torde ankomma på fysikläraren att lägga undervisningen så, att den sist-

nämnda synpunkten kommer till sin rätt, men därför tarvas knappast någon utvidgning av matematikkursen.

Av intresse torde vara att i detta sammanhang erinra om hur man stundom finner det uttalandet, att den deterministiska världsuppfattningen om oföränderliga naturlagar verkat hämmande på utvecklingen. Så t. ex. uttalar lektor A. Wahlund i en skrift, som åberopas i en av svenska seminarielärarföreningens styrelse gjord underdånig framställning,[1] att den naiva uppfattningen, som gjorde sig gällande ännu för några årtionden tillbaka, att naturlagarna äro absoluta och oföränderliga lagar, nu håller på att i grund fördärva folken av företrädesvis germansk härstamning. v. Mises framhåller,[2] att denna världsuppfattning tog sig ett pregnant uttryck i den laplace'ska matematiska dämonen (Essai philosophique des probabilités av år 1814), som på grund av sin obegränsade matematiska induktionsförmåga skulle kunna förutsäga förloppet av världshändelser, så snart han kände de storheter, som karaktäriserade läget i ett visst ögonblick. Uteslutna voro sådana fall, då människans fria vilja kunde antagas medverka. Man kunde exempelvis ej förutsäga antalet dödsfall i detta land detta år, därför att det stod i människans makt att förbättra de sanitära förhållandena, att bosätta sig i hälsosamma trakter o. s. v., men däremot kunde man förutberäkna solförmörkelser med största noggrannhet.

Å andra sidan uttalas, att sannolikhetsräkningen, i första hand den s k. matematiska statistiken, (särskilt nämnas därvid de stora talens lag och Lexis betydelsefulla rön, hans dispersionsteori etc.) skulle sätta oss i stånd att förutsäga förloppet av dödligheten, nedgången i födelsetalen o. s. v. Praktiskt sett torde man i våra dagar förfara på samma sätt som tidigare. Man utarbetar vid dödlighetsundersökningar tabeller, som angiva genomsnittsdödligheten för olika åldrar

[1] Granskning av seminariesakkunnigas beräkning av framtida behov av nyexaminerade folkskollärare, daterad Stockholm i april 1931.

[2] Anförda arbetet av år 1928.

under en viss period och extrapolerar för den närmaste tiden, antingen så, att man anser att de funna värdena kunna användas en tid framåt eller så, att man av tendensen i utvecklingen söker härleda en lag, som återger, hur saken kommer att gestalta sig i framtiden.[1] Analogt förfaringssätt användes vid beräkning av födelsefrekvensen.

Motiv till innehållet i mina uppsatser 1—6. När jag skrev dessa små uppsatser, saknade jag kännedom om de båda sista här upprepade gånger anförda arbetena av v. Mises. Läroboken var ej tillgänglig i bokhandeln förrän i juni 1931. Jag började med felteorien, därför att denna tillhör den mest utbredda och minst omstridda av sannolikhetskalkylens tillämpningar[2] och bildar en övergång till den teoretiska fysiken. Framställningen inleddes med Gauss' felfunktion, eftersom felteorien grundar sig på denna. Till felteorien ansluter sig nära principen för minsta kvadratmetoden och till den sistnämnda teorien för samvariation (korrelation). Den s. k. matematiska statistiken grundar sig på felteorien (Gauss' felfunktion), varför det låg nära till hands att upptaga några exempel på frekvenskurvor. Jag valde ett godtyckligt exempel (åldersfördelningen bland småskollärarinnor), varav framgick, att man icke hade att göra med normal fördelning, vilket i själva verket endast undantagsvis är fallet. Medelvärde och spridning förslå icke att karaktärisera de statistiska företeelserna. Man har därför infört mått på snedhet och excess m. m. Dessa begrepp ha knappast något med den egentliga sannolikhetsräkningen att skaffa, varför man talar om en *beskrivande statistik*.[3] Jag har måst avstå från att ingå på Lexis' dispersionsteori, som lämnar kriterium på naturen av det föreliggande siffermaterialet. Slutligen har jag medtagit kapitlet om liv-

[1] Jfr vad som tidigare anförts i uppsatsen 6 om dödlighetstabeller (1931: 3, sid. 140).

[2] Uppfattningen stämmer med v. Mises uttalande i anförda arbete av år 1928, sid. 132.

[3] v. Mises anförda arbete av år 1928, sid. 130.

försäkring *dels* för att ådagalägga, att den vanliga föreställningen, att den klassiska sannolikhetskalkylen utgör grundval för teorien för livförsäkring, är oriktig,[1] *dels* för att genom en kort framställning av riskproblemet få ytterligare en tillämpning på felteorien, *dels* slutligen för att visa, att den i det föregående anförda läroboken av KARL ROOSWALL, försedd med förord av lektor GÖSTA SETTERBERG, ger läsaren en alldeles oriktig föreställning om hithörande förhållanden. Min framställning anknyter sig alltså intimt till Gauss' klockkurva.

Jag har överallt förutsatt, att förloppet fortlöper kontinuerligt, d. v. s. att man har att göra med geometriska sannolikheter och kan använda grafisk framställning, vilket fullt motiveras av den moderna uppfattningen om ett kollektiv. Sannolikhetsräkningen leder som bekant sitt upphov från FERMAT och PASCAL, som år 1665 samtidigt meddelade lösningen på ett gammalt problem rörande hasardspel. Infinitesimalkalkylen uppfanns kort därpå 1670 samtidigt av NEWTON och LEIBNITZ, men först 100 år senare, 1766, började DANIEL BERNOULLI tillämpa denna på sannolikhetsräkningen. Därigenom funno en del problem, som förut vållat stora kombinatoriska svårigheter, avsevärd förenkling och andra blevo överhuvud tillgängliga för vetenskaplig behandling först genom införande av infinitesimalräkning. Redan då fanns det folk, vilka i likhet med TREMBLEY[2] opponerade sig mot de nya metoderna och påyrkade, att man skulle använda s. k. »elementära» metoder, d. v. s. ett för varje speciellt fall uttänkt förfaringssätt. Man finner redan här liknande motstånd mot infinitesimalkalkylens införande som det, som mer än 100 år senare, yppades mot dess införande å gymnasierna. Ännu i dag förefinnes en strävan att återföra alla problem rörande sannolikhetsräkning på diskontinuerliga (aritmetiska) sannolikheter.

(Forts.)

[1] KARL ENGLUND, anförda uppsats sid. 17.

[2] WIELEITNER, anförda arbete sid. 104.

"Katt och råtta."

Av HUGO TEGNÉR.

(Forts.)

IV. Svaret på frågan IV erhålles genom att lösa s ur ekv. (11) eller med andra ord genom att bestämma s ur kongruenserna (19), där $k_n^{(r)} = \nu$ och där $k_{n-\varrho}^{(r-\varrho)}$ få anta de olika heltalsvärden, som angivas av (20). I fortsättningen kunna de övre indices $(r - \varrho)$ utelämnas. Som i (19) vissa faktorer i allmänhet äro gemensamma för två eller flera modyler, så äro högra leden i (19) och således de i (20) angivna värdena på $k_{n-\varrho}$ $(\varrho = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$ underkastade vissa inskränkningar.

Sätt

$$n - r + 1 = m, \tag{22}$$

och giv (19) följande form:

$$\begin{cases} s \equiv k_m - k_{m-1} \pmod{m} \\ s \equiv k_{m+1} - k_m \pmod{m+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s \equiv k_{m+r-1} - k_{m+r-2} \pmod{m+r-1}, \end{cases} \tag{19'}$$

där

$$\begin{cases} 0 \leqq k_{m+\varrho} < m + \varrho; \ \varrho = 0, 1, 2, \ldots, r-2 \\ k_{m-1} = -1; \ k_{m+r-1} = \nu. \end{cases} \tag{20'}$$

De inskränkande villkoren för heltalsvärdena $k_{m+\varrho}$ erhållas så: Sammanställ med varandra två vilka som helst av kongruenserna (19') med modylerna $m+\varrho_1$, $m+\varrho_2$ och teckna dessa två modylers största gemensamma divisor $\overline{m+\varrho_1, m+\varrho_2}$. Man får då:

$$s = k_{m+\varrho_1} - k_{m+\varrho_1-1} + (m+\varrho_1)\nu_1 = k_{m+\varrho_2} - k_{m+\varrho_2-1} + (m+\varrho_2)\nu_2 .$$

Härav följer nödvändigheten av

$$(23)\quad \begin{cases} k_{m+\varrho_1} - k_{m+\varrho_1-1} \equiv k_{m+\varrho_2} - k_{m+\varrho_2-1} \pmod{\overline{m+\varrho_1,\ m+\varrho_2}} \\ \varrho_1,\ \varrho_2 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1. \end{cases}$$

V. Svaret på frågan V framgår ur IV, om man sätter $r = n$ och således enl. (22) $m = 1$; s löses ur ekv. (10), där $k_n = \nu$. Kongruenserna äro, då $s \equiv k_1 + 1 \pmod 1$ såsom varande självklar kan utelämnas,

$$(24)\quad \begin{cases} s \equiv k_2 - k_1 \pmod 2 \\ s \equiv k_3 - k_2 \pmod 3 \\ - - - - - - - \\ s \equiv k_n - k_{n-1} \pmod n, \end{cases}$$

där

$$(25)\quad \begin{cases} 0 \leqq k_\varrho < \varrho;\ \varrho = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1 \\ k_1 = 0;\ k_n = \nu, \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} k_{\varrho_1} - k_{\varrho_1-1} \equiv k_{\varrho_2} - k_{\varrho_2-1} \pmod{\overline{\varrho_1\ \varrho_2}} \\ \varrho_1,\ \varrho_2 = 2,\ 3,\ \ldots,\ n. \end{cases}$$

För *minsta gemensamma dividenden* till m, $m+1$, $m+2$, ..., $m+s$ införes beteckningen $[m+\varrho]_0^s$.

Om i (9) s får genomlöpa värdena $s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, så återkomma värdena på $k_n^{(r)}(s)$ i samma ordning från och med $s = [n-r+1+\varrho]_0^{r-1} = [m+\varrho]_0^{r-1}$, d. v. s.

$$k_n^{(r)}(s) = k_n^{(r)}(s_1) \text{ för } s \equiv s_1 \pmod{[m+\varrho]_0^{r-1}}.$$

Å andra sidan är $0 \leqq k_n^{(r)} < n$, och vart och ett av de n st. $k_n^{(r)} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ motsvaras av lika många s-värden $< [m+\varrho]_0^{r-1}$, eftersom systemet (19′) tydligen har lika många inkongruenta lösningar mod $[m+\varrho]_0^{r-1}$ $(< [m+\varrho]_0^{r-1})$ för vart särskilt värde på $k_{m+r-1} = k_n^{(r)}$.

De $[m+\varrho]_0^{r-1}$ värdena $s = 0, 1, 2, \ldots, [m+\varrho]_0^{r-1} - 1$ kunna således indelas i n klasser motsvarande de n st. $k_n^{(r)}$, vardera innehållande $\dfrac{[m+\varrho]_0^{r-1}}{n}$ st. s-värden.

Antalet inkongruenta lösningar (mod $[m+\varrho]_0^{r-1}$) till (11) eller (19, 19′) är således

$$\frac{[m+\varrho]_0^{r-1}}{n} = \frac{[\varrho]_{n-r+1}^{n}}{n}. \tag{27}$$

Antalet inkongruenta lösningar (mod $[\varrho]_2^n$) till systemet (24) är

$$\frac{[\varrho]_2^n}{n}. \tag{28}$$

Lösningen av systemet (19′) kan ske på följande sätt:

Om n är ett sammansatt tal, så kan det, upplöst i primfaktorer, skrivas

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots,$$

och kongruensen

$$x = k \pmod{n}$$

är likvärdig med dessa tillsammanstagna:

$$x = k \pmod{a^{\alpha}},\ x = k \pmod{b^{\beta}},\ x = k \pmod{c^{\gamma}},\ \ldots$$

Om nu $[m+\varrho]_0^{r-1}$ upplöses i primtalsfaktorer,

$$M = [m+\varrho]_0^{r-1} = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots, \tag{29}$$

så måste var och en av modylerna i (19′) vara av formen

$$m+\varrho = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1} \ldots \quad (0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha, \ldots).$$

Var och en av kongruenserna i (19′),

$$s = k_{m+\varrho} - k_{m+\varrho-1} \pmod{m+\varrho},$$

är nu likvärdig med följande tillsammanstagna:

$$s = k_{m+\varrho} - k_{m+\varrho-1} \pmod{a^{\alpha_1}};\ s = k_{m+\varrho} - k_{m+\varrho-1} \pmod{b^{\beta_1}};\ \ldots$$

Men med hjälp av (23) kunna de olika kongruenserna av formen

$$\begin{cases} s \equiv l_\alpha \pmod{a^\alpha} \\ s \equiv l_{\alpha_1} \pmod{a^{\alpha_1}} \\ s \equiv l_{\alpha_2} \pmod{a^{\alpha_2}} \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \end{cases}$$

ersättas av kongruenserna

$$\begin{cases} s \equiv l_\alpha \pmod{a^\alpha} \\ s \equiv l_\alpha \pmod{a^{\alpha_1}} \\ s \equiv l_\alpha \pmod{a^{\alpha_2}} \\ - \quad - \quad - \quad - \quad -, \end{cases}$$

och alla dessa kongruenser kunna åter ersättas av den enda

$$s \equiv l_\alpha \pmod{a^\alpha},$$

där

$$l_\alpha = k_{\mu_\alpha} - k_{\mu_\alpha - 1} \tag{30}$$

och μ_α är den modyl $(m + \varrho)$, som är största mångfalden av a^α.

Systemet (19′) är således likvärdigt med

$$\begin{cases} s \equiv l_\alpha \pmod{a^\alpha} \\ s \equiv l_\beta \pmod{b^\beta} \\ s \equiv l_\gamma \pmod{c^\gamma} \\ - \quad - \quad - \quad - \quad -, \end{cases} \tag{31}$$

där l_α är bestämt av (30) och l_β, l_γ, ... i överensstämmelse därmed.

Enligt (27), (28) är systemet (19′), respektive (31) med inskränkande villkor alltid lösbart.

Multiplicera kongruenserna i (31) resp. med de hela talen $\frac{M}{a^\alpha} \cdot x'$, $\frac{M}{b^\beta} \cdot x''$, ... (jfr (29)), där de hela talen x', x'', ... senare skola bestämmas, samt addera:

$$\left(\frac{M}{a^\alpha} x' + \frac{M}{b^\beta} x'' + \ldots\right) s \equiv \frac{M}{a^\alpha} x' l_\alpha + \frac{M}{b^\beta} x'' b_\beta + \ldots \pmod{M}. \tag{32}$$

Eftersom modylerna i (31) ej hava några gemensamma faktorer, kan kongruensen (32) ensam ersätta systemet (31).

Jag sätter

$$y = \frac{M}{a^\alpha} x' + \frac{M}{b^\beta} x'' + \ldots - 1$$

och bestämmer x', x'', ... så, att

$$(33) \qquad \frac{M}{a^\alpha} x' \equiv 1 \pmod{a^\alpha}; \quad \frac{M}{b^\beta} x'' \equiv 1 \pmod{b^\beta}; \ldots,$$

varigenom tydligen y blir delbart med såväl a^α som med b^β etc. och således

$$y \equiv 0 \pmod{M}; \quad y + 1 \equiv 1 \pmod{M}.$$

Om jag betecknar minsta pos. lösningarna till (33), vilka alltid existera, emedan $\frac{M}{a^\alpha}$ och a^α $\left(\text{resp. } \frac{M}{b^\beta} \text{ och } b^\beta\right)$ ej ha någon gemensam faktor, med

$$(34) \qquad x' = N_\alpha; \quad x'' = N_\beta, \ \ldots$$

så övergår (32) till

$$(35) \qquad s \equiv \frac{M}{a^\alpha} \cdot N_\alpha \cdot l_\alpha + \frac{M}{b^\beta} \cdot N_\beta, l_\beta + \ldots \pmod{M}$$

och de $\frac{M}{n}$ inkongruenta lösningarna $(< M)$ till (19′) eller (31) innehållas i ekvationen [1]

$$(35') \qquad s = \mathfrak{E}^{(M)}_{\frac{M}{a^\alpha} \cdot N_\alpha \cdot l_\alpha + \frac{M}{b^\beta}, N_\beta \cdot l_\beta + \ldots}.$$

Motsvarande lösning erhålles för systemet (24).

Värdena på l_α, l_β, ... äro inskränkta genom villkoren (23), resp. (26). Med hjälp av dessa kunna en del k_μ uttryckas i de övriga, såsom framgår av följande ex.

[1] Innehållet i lösningen (35, 35′) till kongruenssystemet (31) finnes härledd redan för många århundraden sedan hos den kinesiska matematikern *Sun Tsze* (se BACHMANN: Niedere Zahlentheorie I, sid 83).

Exempel: $n = 8$; hur stort skall s tagas för att det $(\nu + 1)$:sta föremålet skall bli sist kvar?

$M = [\varrho]_2^8 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 840$; $\frac{M}{n} = 105$; (31) får formen

$$\begin{cases} s \equiv \nu - k_7 \pmod{2^3} \\ s \equiv k_7 - k_6 \pmod 7 \\ s \equiv k_5 - k_4 \pmod 5 \\ s \equiv k_6 - k_5 \pmod 3 \end{cases}$$

med villkoren

$$\nu - k_7 \equiv k_6 - k_5 \equiv k_4 - k_3 \equiv k_2 \pmod 2$$
$$k_6 - k_5 \equiv k_3 - k_2 \pmod 3; \quad \nu - k_7 \equiv k_4 - k_3 \pmod 4,$$

vilka kunna skrivas $(k'_3 = 0, 1, 2)$

$$k_4 = \varepsilon^{(4)}_{\nu - k_7 + k_3}; \quad k_3 = \varepsilon^{(3)}_{k_6 - k_5 + k_2}; \quad k_2 = \varepsilon^{(2)}_{\nu - k_7}; \quad k_6 = 2k'_3 + \varepsilon^{(2)}_{\nu - k_7 + k_5}.$$

Av (33) erhålles

$$\begin{cases} 7 \cdot 5 \cdot 3\, x' \equiv 1 \pmod 8; & 8 \cdot 5 \cdot 3\, x'' \equiv 1 \pmod 7; \\ 8 \cdot 7 \cdot 3\, x''' \equiv 1 \pmod 5; & 8 \cdot 7 \cdot 5\, x'''' \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

$$x' \equiv 1 \pmod 8; \quad x'' \equiv 1 \pmod 7; \quad x''' \equiv 2 \pmod 5;$$
$$x'''' \equiv 1 \pmod 3.$$

Av (35) erhålles

$$s \equiv 105\,(\nu - k_7) + 120\,(k_7 - k_6) + 168 \cdot 2\,(k_5 - k_4) + \\ + 280\,(k_6 - k_5) \pmod{840}.$$

Då får (35′) med hjälp av villkoren formen:

$$s = \varepsilon^{(840)}_{105\,\nu + 15\,k_7 + 56\,k_5 + 320\,k'_3 + 160\,\varepsilon^{(2)}_{\nu - k_7 + k_5} + 504\,\varepsilon^{(4)}_{\nu - k_7 + \varepsilon^{(3)}_{2k'_3 - k_5 + \varepsilon^{(2)}_{\nu - k_7 + k_5}}} + \varepsilon^{(2)}_{\nu - k_7}},$$

där k_7, k_5 och k'_3 representera $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$ inkongruenta värden i överensstämmelse med (28).

En ny polvåg för härledning av Coulombs lag.

Av GUST. FORSSTRÖM.

Redan genom de inledande experiment, som föra till den kvalitativa lagen om magnetpolers inbördes kraftverkan, finner man, att storleken av denna verkan ändras med avståndet mellan polerna. För att utröna den kvantitativa lagen har jag vid min gymnasieundervisning senast förflutna läsår använt en polvåg av hittills ej bruklig konstruktion. Då den visat sig överlägsen den vanliga polvågen, torde den förtjäna ett omnämnande i denna tidskrift.

Som utgångsmaterial valdes strumpstickor av grövsta i järnhandeln tillgängliga kaliber, detta för att få nog kraftiga magneter. Tre sådana stickor fingo samtidigt rum i en särskilt gjord magnetiseringsspiral, bestående av ett glasrör omlindat med dubbla varv vanlig, överklädd ledningstråd, varigenom under fyra minuter leddes en ström på 20 amp. från en elektrisk kopplingstavla. I avsikt att befordra en jämnare magnetisering reglerades strömmen så, att den ej plötsligt fick växa till maximum eller sjunka till nollvärdet.

Ungefär en vecka efter tillverkning av ett antal dylika magnetstickor skulle polernas lägen bestämmas. Detta innebär uppenbarligen en abstraktion, enär i en verklig magnet magnetismen ju ej är koncentrerad i två punkter. Frågan är således, om våra stavmagneter i sin ömsesidiga kraftverkan kunna tänkas ersatta med idealmagneter, d. v. s. magneter med var sitt par fixa poler.

Tänker man sig (fig. 1) en lång, stavformig magnet med polerna N och S, bestämmes polavståndet NS tydligen av de genom N och S gående kraftlinjer, som bilda rät vinkel med magnetens längdaxel. Polbestämningen utfördes sålunda.

Ett med rutat mm-papper överspänt ritbräde orienterades i horisontalplanet med det ena linjesystemet i magnetiska meridianens riktning, angiven genom magnetnålen i en liten kompassdosa. Tätt intill denna dosa lades så längs det andra linjesystemet i tur och ordning de olika magnetstickorna på sådant sätt, att kompassnålens riktning blev oförändrad. Polernas avstånd från närmaste ända av magneten befanns vara i det närmaste $^1/_{14}$ av magnetstickans hela längd i stället för $^1/_{12}$, som man brukar räkna med för en lång, smal magnet.

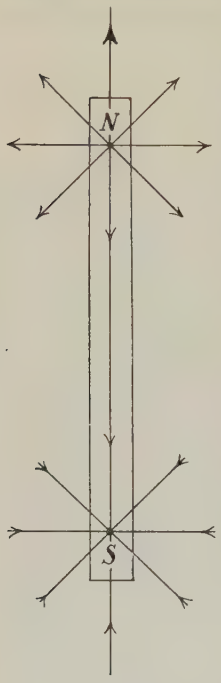


Fig. 1.

För att få själva polvågen urborrades axialt en cylindrisk kork (fig. 2), så att den endast med tröghet kunde föras över en halvcentimetertjock glasstav ungefär till dess mitt, och tvärs genom korken stacks en synål (P), som korsade glasstaven under rät vinkel. Över stavens ena ända fördes därpå en annan kork, varigenom stuckos tätt till varandra och vinkelrätt mot glasstaven fyra magnetstickor med liknämnda poler åt samma håll (N_1S_1). I glasstavens andra ända infördes på samma sätt till motvikt en kork med en mässingsstav (A_1B_1), som injusterades så, att den blev parallell med magnetknippet och att planet genom båda blev vinkelrätt mot synålen. Denna polvågsbalans (23,5 cm lång) placerades till sist mellan två jämnhöga cylinderglas, så att synålen (= vridningsaxeln) vilade på vartdera glasets övre, glatta rand. I och för eliminering av jordmagnetismens vridande moment justerades apparaten så, att balansen blev vridbar i ett *mot magnetiska meridianen vinkelrätt plan*. Vid jämvikt skulle den sammansatta magneten intaga vertikalt läge (med nordändan nedåt). Detta kontrollerades

med sänklod, och finjustering skedde med hjälp av en kort mässingstråd (A_2B_2), som stacks genom mittkorken rakt under och parallellt med glasstaven. Genom lämplig förskjutning av mässingsstav och magnetknippe i resp. korkar kunde vågens känslighet göras tillräckligt stor.

Omedelbart bakom polvågen och i balansens förlängning uppställdes vertikalt en i mm graderad meterlång linjal (AB) samt i rakt motsatt riktning på omkring två meters

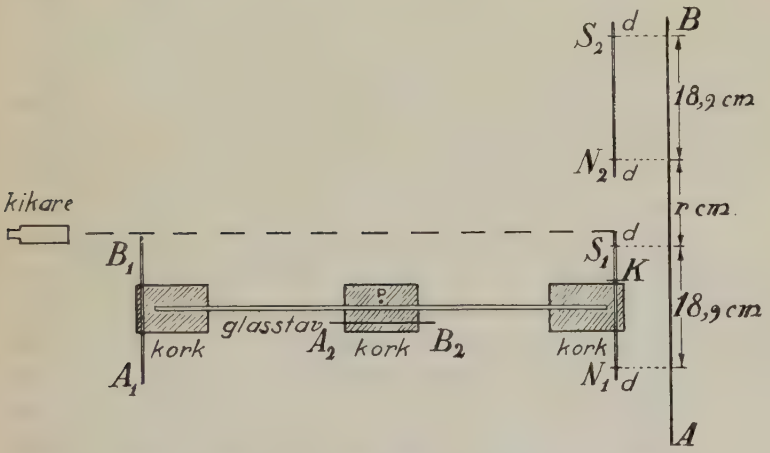


Fig. 2. Lodrätt snitt genom den belastade polvågen i jämviktsläge med magnet ($N_1 S_1$), mässingsstav ($A_1 B_1$), mässingstråd ($A_2 B_2$), devierande magnet ($N_2 S_2$), graderad linjal (AB) och kikare.

avstånd en avläsningskikare med optiska axeln vågrät och i jämnhöjd med det vertikala magnetknippets övre ända. Liksom vid en vanlig känslig våg bestämdes jämviktsläget icke för stillastående vågbalans utan ur vändpunkterna vid små svängningsrörelser hos denna.

Den devierande magneten (N_2S_2) var sammansatt av sex magnetstickor med liknämnda poler åt samma håll och upphängdes i lodrät ställning i en lång, fin sytråd, löpande över en i taket fästad märla, varför den bekvämt kunde hissas upp eller ned rakt över polvågmagneten i dess vertikala läge.

Lämpliga belastningsvikter erhöllos genom att på 0,5 mg när väga en så lång, smal, jämntjock aluminiumtråd, att man av denna kunde klippa ut tio lika långa stycken på 10 dyn var och sedan vika ihop varje stycke i ringform. Som 10 dyn motsvarar 10,2 mg, blir relativa felet i vikten av varje ring $0{,}05 : 10{,}2$ eller i det närmaste 0,5 %.

Gradering av polvågen är onödig, och vi övergå till att beskriva, hur en observationsserie tages.

Först bestämmes enligt det föregående nolläget. En aluminiumring (K) lägges sedan kring polvågens magnetsystem, vars jämviktsläge härigenom rubbas men återställes medels det devierande magnetsystemet, som med nordändan nedåt hänges upp på den fina tråden och justeras in i behörigt läge. Under justeringen får trådens fria ända löpa under en på arbetsbordet liggande klots, som därefter med sin tyngd kvarhåller den av tråden uppburna magneten i det önskade läget. Utan att ändra kikarens vågräta axelriktning höjes det trästativ, som uppbär kikaren, tills man kan sikta in och på skalan avläsa läget av den övre magnetens nedre ända. Sedan ökas vågens belastning med 10 dyn i taget, och samma mätningsprocedur upprepas, till dess man fått tillräckligt många observationer. Behandlingen av observationsmaterialet framgår av tabell I, där $K =$ belastningen, $n =$ avläst skaldel, $r =$ avståndet mellan närmaste poler i polvågens magnet och den devierande magneten, $d =$ polavstånd från närmaste magnetända och således $r - 2d =$ avståndet mellan polvågmagnetens *övre* ändpunkt (i tabellen kursiverade tal, $n = 31{,}8$ o. $31{,}7$) vid vertikalt jämviktsläge och den devierande magnetens *nedre* ändpunkt ($n = 48{,}0$ o. s. v.).

Av tabellens kolumner uppskrivas till en början endast de fyra första. Man finner, att K ökar, när r minskar, vadan omvänd proportionalitet dem emellan kan förmodas och fördenskull produkten Kr bildas. Som synes av femte kolumnen, är emellertid denna produkt ej konstant utan ökar ävenledes med avtagande r, varför i stället omvänd propor-

Tabell I. ($2d = 3{,}2$ cm)

K (dyn)	n (cm)	$r - 2d$ (cm)	r (cm)	Kr	Kr^2 (med tre signif. siffror)	Kr^3
0	*31,8*	—	—	—	—	—
10	48,0	16,2	19,4	194	3760	73000
20	43,1	11,3	14,5	290	4210	61000
30	41,0	9,2	12,4	372	4610	57200
40	39,6	7,8	11,0	440	4840	53200
50	38,5	6,7	9,9	495	4900	48500
60	37,8	6,0	9,2	552	5080	46700
0	*31,7*	—	—	—	—	—

tionalitet mellan Kr och r möjligen kan gälla, d. v. s. Kr^2 vara konstant. Enligt sjätte kolumnen ökar dock jämväl Kr^2, när r minskar. Man bildar därför Kr^3, som ej heller är konstant utan *minskar* med r. Jämföras nu de tre sista kolumnerna, framgår, att den mellersta företer de minsta variationerna. Detta tyder på den kvantitativa lagen $Kr^2 = konstant$ med en faktisk »gång» i produkten, som måste bero på någon systematisk felkälla. Denna senare är ej svår att upptäcka: Vi hava tacite antagit, att K representerar kraften mellan två magnetpoler, under det att i själva verket icke mindre än fyra poler utöva inverkan på varandra. Härtill skall i det följande hänsyn tagas.

Polvågens jämviktsläge bestämmes av inalles fem krafter, alla verkande utefter samma lodlinje: en mekanisk $= K$ dyn och fyra magnetiska, varav två attraherande och två repellerande. Vi antaga nu som sannolikt, att de magnetiska krafterna äro omvänt proportionella mot resp. polavstånds kvadrater (med c till proportionalitetsfaktor) och få med ledning av fig. 2 jämviktsekv.

$$(1) \qquad K = c\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+37{,}8)^2} - \frac{2}{(r+18{,}9)^2}\right].$$

Föreställer k dyn storleken av den magnetiska kraften mellan de båda polerna på r cm:s avstånd, kan ur ekv. (1) $c = kr^2$ beräknas för olika r-värden. Föregående tabell ger sålunda upphov till nedanstående tabell II.

Tabell II.

K (dyn)	r (cm)	kr^2 (med två signif. siffror)
10	19,4	6200
20	14,5	6000
30	12,4	6200
40	11,0	6200
50	9,9	6100
60	9,2	6200
		6150

Gången i produkten av kraft och avståndets kvadrat är nu försvunnen, och frågan är blott, om största relativa avvikelsen från medeltalet $\left(\frac{150}{6150} = 2{,}4\ \%\right)$ faller inom observationsfelens område. Det gäller således att med hjälp av ekv. (1) beräkna det största relativa fel i c, som uppkommer genom osäkerheten i bestämningen av K och r.

Vi sätta

$$c = \frac{K}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+37{,}8)^2} - \frac{2}{(r+18{,}9)^2}} = \frac{K}{U}$$

och få

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta U}{U}$$

samt med vanlig approximation

$$\frac{\Delta U}{\Delta r} = \left|\frac{dU}{dr}\right| = \frac{2}{r^3} + \frac{2}{(r+37{,}8)^3} - \frac{4}{(r+18{,}9)^3},$$

varav

$$(2) \qquad \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta K}{K} + \frac{\frac{1}{r^3} + \frac{1}{(r+37{,}8)^3} - \frac{2}{(r+18{,}9)^3}}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+37{,}8)^2} - \frac{2}{(r+18{,}9)^2}} \cdot 2\Delta r.$$

Enligt sid. 4 är $\frac{\Delta K}{K} = 0{,}5\ \%$. Då de i tab. I införda n-värdena kunde avläsas på 0,5 mm när, blir $2\Delta r$ åtminstone $= 0{,}2$ cm. Dessa båda siffervärden jämte tabellens minsta r-värde ($= 9{,}2$ cm) insättas nu i ekv. (2), varvid man finner, att relativa felet i c ej överstiger 3,0 %. Enär $2{,}4\ \% < 3{,}0\ \%$, blir alltså slutsatsen av vår experimentella undersökning, att *våra magneter kunna betraktas såsom idealmagneter, vilkas polverkan återges av formeln* $kr^2 = \text{konstant}$, *där* k

föreställer den kraft, som verkar mellan två magnetpoler på avståndet r från varandra.

Hittills har antalet magnetstickor varit orubbat i såväl polvågens magnetsystem som i det devierande, nämligen fyra i det förra och sex i det senare. Minskas det sistnämnda antalet, finner man, att värdet på kr^2 också minskar, beroende på — såsom man uttrycker saken — att den devierande magnetens *polstyrka* minskat. Vi fastställa nu detta begrepp så, att det sättes proportionellt mot kr^2, d. v. s. om man ersätter den devierande magneten med en annan och genom polvågen finner, att kr^2 antager t. ex. ett tre gånger så stort värde som nyss, så är den nya magnetens polstyrka tre gånger den gamlas. Betecknas den devierande magnetens polstyrka med m, gäller således formeln $kr^2 = c_1 m$, där proportionalitetsfaktorn c_1 måste vara en viss funktion $f(m_1)$ av polvågmagnetens polstyrka m_1, alltså $kr^2 = mf(m_1)$. Tänka vi oss sedan, att de båda magneterna byta plats, måste enligt lagen för verkan och återverkan kr^2 bibehålla sitt värde, vadan

$$kr^2 = mf(m_1) = m_1 f(m),$$

som efter division med mm_1 ger

$$\frac{kr^2}{mm_1} = \frac{f(m_1)}{m_1} = \frac{f(m)}{m} = \text{konstant} = c_2.$$

Med sedvanlig definition på enheten för polstyrka fås till sist Coulombs lag i sin enklaste form

$$k = \frac{mm_1}{r^2}.$$

Den ovan beskrivna polvågens viktigaste företräden framför den vanliga med vågräta magneter kunna sammanfattas i följande punkter:

1:o Samtliga på vågens jämviktsläge inverkande krafter ligga utefter samma lodlinje och ingen behöver försummas.

2:o Polvågen behöver ej graderas.

3:o Den devierande magnetens läge kan lätt och noggrant regleras.

Om rationella värden på sidor och diagonaler i en parallellogram.

Av J. S. HEDSTRÖM.

Det torde ej så sällan ha vållat matematiklärarne tidsutdräkt att sammanställa planimetriska eller trigonometriska räkneexempel med lämpliga sifferuppgifter, då det gällt sidor och diagonaler i en pg (eller sidor och en median i en triangel). En undersökning visar emellertid, att man lätt nog kan finna en metod härför, som är enkel att använda.

Låt a och b vara godtyckligt valda, rationella värden på sidorna i en pg. Vi söka rationella värden på diagonalerna x och y.

Av diagonalsatsen erhålles

$$2a^2 + 2b^2 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

Vi skriva nu diagonalerna såsom lineära funktioner av sidorna under följande form:

$$\begin{cases} x = ka + lb \\ y = pa + qb. \end{cases} \tag{2}$$

Efter insättning i (1) erhålles

$$\begin{cases} k^2 + p^2 = 2 \\ l^2 + q^2 = 2 \\ kl + pq = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Genom lösning härav erhålles

$$\begin{cases} q = k \\ l = -p \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} q = -k \\ l = p. \end{cases}$$

Av dessa båda system är endast det ena användbart, enär både x och y måste vara positiva. Förutsätta vi nu $a \geqq b$ samt $k > 1$, så bortfaller det senare systemet, och vi ha

$$\begin{cases} q = k \\ l = -p. \end{cases}$$

Systemet (2) kan således ersättas av

$$\begin{cases} x = ka - pb \\ y = pa + kb. \end{cases} \tag{4}$$

Vi ha nu att söka rationella värden på k och p enligt (3). Av ekv. $k^2 + p^2 = 2$ erhålles

$$k^2 - 1 = 1 - p^2 \quad \text{eller} \quad \frac{k+1}{1-p} = \frac{1+p}{k-1} = z,$$

där z under ovan givna förutsättningar är > 1.

Genom lösning härav får man

$$\begin{cases} k = \dfrac{(z+1)^2 - 2}{z^2 + 1} \\ p = \dfrac{(z-1)^2 - 2}{z^2 + 1}. \end{cases} \tag{5}$$

I. Vill man ha diagonalernas längder i form av exakta decimaltal, får man välja värdena på z i (5) så, att $z^2 + 1$ endast kommer att innehålla faktorerna 2 och 5.

Vi välja följande z-värden:

A. $z = 2$, varav $k = 1{,}4$; $p = -0{,}2$,
B. $z = 3$, » $k = 1{,}4$; $p = 0{,}2$,
C. $z = 7$, » $k = 1{,}24$; $p = 0{,}68$.

Ex. 1. Vi taga en pg med sidorna $a = 15$; $b = 10$.

Härav erhålles enligt (4):

A. $\begin{cases} x = 1{,}4 \cdot 15 + 0{,}2 \cdot 10 = 23 \\ y = -0{,}2 \cdot 15 + 1{,}4 \cdot 10 = 11. \end{cases}$

Denna pg har sålunda sidorna 15 och 10 samt diagonalerna 23 och 11. Väljer man en triangel med sidorna 15, 10 och 23, så är medianen mot sistnämnda sida $= 5{,}5$. Äro sidorna 15, 10 och 11, så är sistnämnda sidas median $= 11{,}5$.

Man kan här fråga sig, om längderna på sidorna a och b kunna väljas helt godtyckligt. Emedan a, b och x samt

a, b och y skola bilda var sin triangel, måste för $a \geqq b$ följande villkor vara uppfyllda:

$$a - b < ka - pb < a + b \text{ och } a - b < pa + kb < a + b.$$

Dessa villkor kunna enligt ovan givna förutsättningar samlas i följande:

$$-b\,(k+1) < a\,(p-1) \text{ d. v. s. } z > \frac{a}{b}.$$

Om vi i nu föreliggande ex. fasthålla $b = 10$, så erhålles

$$10 \leqq a < 20.$$

B. $\begin{cases} x = 19 \\ y = 17 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 11{,}8 \\ y = 22{,}6\,. \end{cases}$

Ex. 2. $a = 4\,;\ b = 3.$

A. $\begin{cases} x = 1{,}4\,.\,4 + 0{,}2\,.\,3 = 6{,}2 \\ y = -\,0{,}2\,.\,4 + 1{,}4\,.\,3 = 3{,}4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$ Sålunda en rektangel. C. $\begin{cases} x = 2{,}92 \\ y = 6{,}44\,. \end{cases}$

Ex. 3. $a = b = 17.$

A. $\begin{cases} x = (1{,}4 + 0{,}2)\,.\,17 = 27{,}2 \\ y = (1{,}4 - 0{,}2)\,.\,17 = 20{,}4 \end{cases}$

B. Samma romb. C. $\begin{cases} x = 9{,}52 \\ y = 32{,}64\,. \end{cases}$

II. Vi skola nu bestämma några bråkvärden för diagonalerna. Vi välja följande värden på z.

D. $z = 4$, varav $k = \frac{23}{17}$; $p = \frac{7}{17}$.

E. $z = 5$, varav $k = \frac{17}{13}$; $p = \frac{7}{13}$.

F. $z = 6$, „ $k = \frac{47}{37}$; $p = \frac{23}{37}$.

Ex. 4. $a = 15\,;\ b = 10.$

D. $\begin{cases} x = \frac{23}{17} \cdot 15 - \frac{7}{17} \cdot 10 = \frac{275}{17} = 16\,\frac{3}{17} \\ y = \frac{7}{17} \cdot 15 + \frac{23}{17} \cdot 10 = \frac{335}{17} = 19\,\frac{12}{17}. \end{cases}$

E. $\begin{cases} x = 14\,\frac{3}{13} \\ y = 21\,\frac{2}{13}. \end{cases}$ F. $\begin{cases} x = 12\,\frac{31}{37} \\ y = 22\,\frac{1}{37}. \end{cases}$

Ex. 5. $a = 4\,;\ b = 3.$

D. $\begin{cases} x = 4\,\frac{3}{17} \\ y = 5\,\frac{12}{17}. \end{cases}$ E. $\begin{cases} x = 3\,\frac{8}{13} \\ y = 6\,\frac{1}{13}. \end{cases}$ F. $\begin{cases} x = 3\,\frac{8}{37} \\ y = 6\,\frac{11}{37}. \end{cases}$

Ex. 6. $a = b = 17.$

D. $\begin{cases} x = 16 \\ y = 30. \end{cases}$ E. $\begin{cases} x = 13\,\frac{1}{13} \\ y = 31\,\frac{5}{13}. \end{cases}$ F. $\begin{cases} x = 11\,\frac{1}{37} \\ y = 32\,\frac{6}{37}. \end{cases}$

En överskådlig elektrisk kopplingstavla.

Av **Alf Heimer.**

Möjligheterna att effektivt utnyttja den elektriska kopplingstavlan vid undervisningen i elektricitetslära har nästan fullständigt försummats. De kopplingstavlor, som finnas, äro ju också oftast för ifrågavarande ändamål så olämpliga som gärna är möjligt. Vid tillverkning av kopplingstavlor har nästan aldrig en tanke ägnats åt den praktiska sidan av saken, långt mindre åt den pedagogiska. Det som kommit i första rummet, har varit utseendet, en tavla har ansetts bättre, ju vackrare den har varit, och oftast har man satt likhetstecken mellan symmetri och skönhet.

När därför en lärare kommer till en skola, där han inte förut tjänstgjort, och skall använda sig av kopplingstavlan, kan han i regel ej av tavlans utseende, av instrumentens placering, sluta sig till, hur manövreringen skall tillgå. Han får leta rätt på ett kopplingsschema först och sedan med tillhjälp av detta och de eventuella märkplåtar, som finnas under de olika instrumenten, sluta sig till tavlans manövrering. Härtill kommer att kopplings-

schemat mycket ofta är opraktiskt ritat, så att tydningen blir onödigt invecklad.

Den kopplingstavla, jag vill föreslå som ersättning för den hittills brukliga typen, utföres helt enkelt som ett kopplingsschema av enklast möjliga slag. Fig. 1 visar den föreslagna tavlans utseende. För jämförelses skull har jag i fig. 2 uppritat motsvarande tavla (d. v. s. med samma koppling och samma instrument)

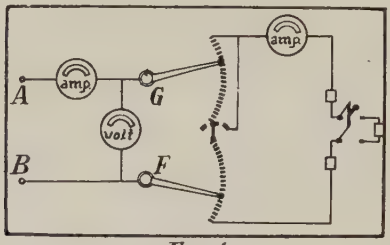


Fig. 1.

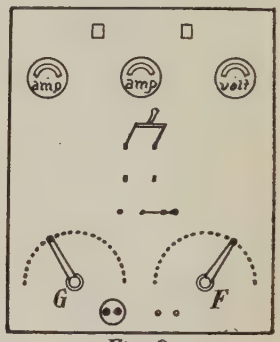


Fig. 2.

enligt nuvarande typ samt dessutom under tavlan, i fig. 3, uppritat kopplingsschemat såsom det vanligen utföres, då det är som bäst. För 220 volts nätspänning består grovregleringsmotståndet G av 21 st. 10 ohms motstånd och finregleringsmotståndet F av 20 st. 0,5 ohms motstånd. Shuntströmmen blir då vid öppen uttagsledning jämnt 1 ampère. Det stora motståndet kan förbikopplas, varigenom man får möjlighet att taga ut stor strömstyrka vid låg spänning. Givetvis kan tavlan även utföras med annan koppling och instrumentering än i ovan visade fall, exempelvis med annan motståndsreglering, men tavlan behöver därvid icke undergå någon nämnvärd förändring. I stället för verkliga ledningar mellan de olika instrumenten kan man lämpligen använda målade linjer. I varje fall bör man undvika vanliga isolerade ledningar, som lätt samla damm.

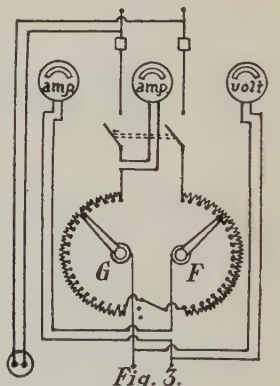


Fig. 3.

Den nya tavlans fördelar äro många och påtagliga. Den är överskådlig. Varje instrument är så placerat, att dess funktion är otvetydig. Någon tvekan om t. ex. vad för en spänning eller ström den eller den volt- resp. ampèremetern visar, är inte gärna

möjlig. Lika litet behöver man tveka om hur uttagsspänningen skall minskas eller ökas, eller om hur den mellan de båda regleringsmotstånden befintliga omkopplaren skall ställas för att få shunt- eller seriekoppling eller förbikoppling av det stora regleringsmotståndet. Eleverna kunna lätt sköta manövreringen och hela klassen kontrollera densamma. Betydelsen härav är uppenbar. Med denna kopplingstavla, detta kopplingsschema, kan man ju visa förhållandet mellan de för kunskapen i elektricitetslära grundläggande storheterna spänning, ström och motstånd. Genom att ständigt se denna tavla framför sig och följa dess manövrering vid de olika experimenten få eleverna automatiskt dessa grunder inpräntade. De kunna t. ex. se hur vid shuntkoppling, då uttagsledningen är öppen, uttagsspänningen beror på storleken av det mellan G och F inkopplade motståndet och hur vid seriekoppling med sluten uttagsledning spänningen ändras med den uttagna strömstyrkan och med motståndet.

Man kan med tavlans tillhjälp visa Ohms och Kirchhoffs lagar m. m. Ett reglerbart motstånd eller ett element kan exempelvis inkopplas mellan A och B i fig. 1. Härvid kan det vara lämpligt placera motståndet resp. elementet bokstavligen mellan A och B i och för överskådlighetens bibehållande. För mätning av strömstyrkan i shuntledningen kan en ampèremeter inkopplas å själva tavlan mellan grov- och finregleringarna. (Härför lämpliga ampèremetrar finnas i handeln.) Man erhåller härvid i båda fallen 3 strömkretsar, i vilka man känner elektromotoriska krafterna och motstånden och kan avläsa strömstyrkorna i alla grenledningar och sålunda visa Kirchhoffs lagar.

Tavlan bör göras helt fristående och flyttbar. Den skall kunna kopplas till nätet eller till annan strömkälla, alldeles efter behag. Mellan A och B kan man, om man så vill, insätta en stickkontakt eller en knivströmbrytare, men som det inte är behövligt och överskådligheten därigenom minskas, har jag föredragit anslutning direkt till klämmor vid A och B. Omkopplaren mellan grov- och finregleringsmotstånden bör utföras så, att den ej genom oförsiktighet, exempelvis en stöt, kan glida över från ett läge till ett annat. Man kan ju helt enkelt utföra förbindningen med en skena, som fastklämmes med vingmuttrar.

Slutligen vill jag framhålla, att det rent praktiska utförandet av den föreslagna tavlan ej blir svårare eller dyrbarare, i många fall enklare och billigare än vid de nu brukliga typerna.

Förslag till uppgifter för enskilt arbete i astronomi.

Av C. LUNDAHL.

Nedanstående observations- och konstruktionsuppgifter ha under läsåret 1930—1931 och sistförflutna hösttermin utförts av tvenne elever vid Jönköpings läroverk. De instrument och övriga hjälpmedel, som därvid använts, äro:

teodolit(-modell) med hårkors, eller i vissa fall *ekvatoreal*(-modell) med hårkors, *astronomisk tub, sextant, gnomon* med flera olika långa ståndare och numrerade koncentriska ringar å plattan (högst 5 mm mellanrum), *vattenpass* (2 st.), *stjärntidsur* (ett vanligt ur så ruckat, att det visar stjärntid), *borgerligtids-ur* (fickur), *skyddsglas* vid iakttagande av solen, *Svenska Almanackan.*

Då avsikten med det enskilda arbetet är att vänja ungdomen vid självständigt arbete, ha redogörelserna för uppgifternas utförande avsiktligt gjorts korta och föga detaljerade. De elever, som begära uppgifter för enskilt arbete i astronomi, äro väl i regel så intresserade av ämnet, att de på förhand känna till de i den följande framställningen åsyftade koordinatsystemen och formlerna eller åtminstone veta, var de skola finna dem behandlade resp. härledda. I kvistiga fall får givetvis läraren ge råd och anvisningar.

I de fall, då rättgående fickur erfordras, kan korrektion till detsamma erhållas per radio.

Beträffande sextantens konstruktion och teori hänvisas till Grimsehl, Lehrbuch der Physik.

1. *Bestämning av meridianen* (första metoden).

Uppgiften kan kombineras med försök 3. Hjälpmedel: gnomon, två vattenpass.

Gnomon uppställes lämpligen på en sådan plats, varifrån sedermera de observationer bäst göras, för vilkas utförande kännedom om meridianen är behövlig. Medelst vattenpassen justeras gnomon, så att dess platta blir horisontell, och den för årstiden lämpligaste ståndaren utväljes. Meridianbestämningen sker genom

markering på successiva ringar av skuggan av gnomonståndarens spets.

Meridianen överföres på lämpligt sätt till gnomonplattans underlag (golv, bord) och markeras där med en knivskåra e. d.

2. *Bestämning av riktning och belopp för den (skenbara) dagliga rörelsen hos solen, månen, en planet eller en stjärna.*

Hjälpmedel: a) teodolit, fickur, skyddsglas för solen, eller b) ekvatoreal, fickur, skyddsglas för solen.

a) Den himlakropp, som för ändamålet skall observeras, bör befinna sig i närheten av meridianen, vilken bestämts i försök 1. Kikaren inriktas mot himlakroppen vid två tidpunkter med lämpligt intervall, och den senares skenbara förflyttning avläses. Förflyttningens belopp per timme kan då beräknas; riktningen framkommer under försökets gång.

b) Himlakroppen ifråga kan vara belägen var som helst på himlavalvet. Förfaringssättet är detsamma som i a).

Ett noggrannare värde på dagliga rörelsens belopp erhålles, om instrumentet riktas mot himlakroppen vid flera än två tidpunkter.

Om observationer i detta försök göras på såväl solen som månen och en stjärna med tillräckligt långa tidsintervall för vardera, bör förklaring givas på skiljaktigheterna i de uträknade värdena av dagliga rörelsens belopp.

Den dagliga rörelsens riktning kan även bestämmas utan något som helst instrument, direkt med hjälp av en flaggstång, telefonstolpe, skorsten, fönsterpost e. d., indirekt genom observation av skuggor av dylika föremål.

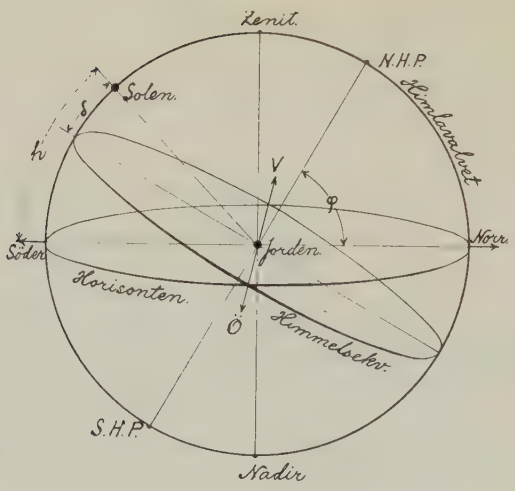
3. *Bestämning av polhöjden* (första metoden).

Uppgiften kan kombineras med försök 1, om de trigonometriska funktionerna äro bekanta. Hjälpmedel: gnomon, två vattenpass, Svenska Almanackan.

Detta försök utföres på samma sätt som försök 1. Ur de noggrant uppmätta längderna av gnomonståndarens höjd och kortaste skuggan kan solens middagshöjd (h) beräknas. Svenska Almanackan ger upplysning om solens deklination (δ), varefter polhöjden (φ) erhålles med hjälp av fig. 1.

4. *Bestämning av ett urs korrektion.*

Hjälpmedel: gnomon, två vattenpass, Svenska Almanackan.



Figur 1.

I astronomiska läroböcker omnämnes en formel, som anger ett samband mellan storheterna: borgerlig tid (t_b), sann soltid (t_s), tidsjämning eller tidsekvation (*tj*), tidsskillnad (*tsk*). De två sistnämnda storheterna erhållas ur Svenska Almanackan.

Förevarande försök avser att:

1:o: *beräkna* t_b ur ett visst lämpligt valt värde på t_s och med hjälp av de ur Svenska Almanackan hämtade värdena på *tj* och *tsk*;

2:o: medelst uret avläsa t_b (detta värde betecknas med t_b') för samma värde på t_s som i 1:o;

3:o: genom jämförelse mellan det beräknade (och således riktiga) värdet på t_b och det avlästa (d. v. s., om uret går orätt, oriktiga) värdet på t_b (t_b') beräkna urets korrektion.

Det värde på t_s, som man i 1:o väljer till utgångspunkt, är $t_s = 12$ tim., d. v. s. sann middag. Detta ögonblick kan ju direkt fixeras medelst gnomon och uret då avläsas, varigenom t_b' blir känd.

För att emellertid erhålla t_b' med större noggrannhet använder man sig av följande indirekta metod. Man noterar tidpunkterna enligt uret, då ståndarspetsens skugga sammanfaller med ett antal cirkelperiferier på gnomonplattan *såväl före som efter sann middag — samma* ringar före och efter sann middag. Ur dessa tidsavläsningar kan t_b' beräknas; ur t_b och t_b' kan urkorrektionen beräknas.

Uret bör ha sekundvisare, som före försöket injusterats så, att den står på 60, när minutvisaren passerar ett minutstreck.

5. *Bestämning av meridianen* (andra metoden).

Hjälpmedel: fickur med känd korrektion, Svenska Almanackan.

Medelst den i försök 4 åsyftade formeln beräknas, vad uret bör visa, då sann middag inträffar, d. v. s. då $t_s = 12$ tim. Meridianen erhålles då som skugglinjen på en horisontell yta (golv, bord e. d.) av en väggkant, fönsterpost, upphängd lodlina etc. Meridianen kan även erhållas som ljusstrimman på en horisontell yta från en solbelyst, rätlinjig, vertikal springa utskuren i en pappskiva, vilken fästs mellan två fönsterposter, så att springan är lodrät.

Meridianen kan lämpligen markeras så, som i försök 1 angivits.

6. *Bestämning av polhöjden* (andra metoden).

Uppgiften kan kombineras med försök 13 och 14. Hjälpmedel: a) sextant, fickur med känd korrektion, Svenska Almanackan, skyddsglas, eller b) sextant, gnomon, två vattenpass, skyddsglas.

a) Man beräknar på sätt, som i försök 5 angivits, vad fickuret skall visa vid sann middag. Då detta ögonblick inträffar, mäter man med sextanten solens middagshöjd, varefter polhöjden beräknas som i försök 3.

b) Sann middag angives av gnomon. Tillvägagångssättet är i övrigt detsamma som i a).

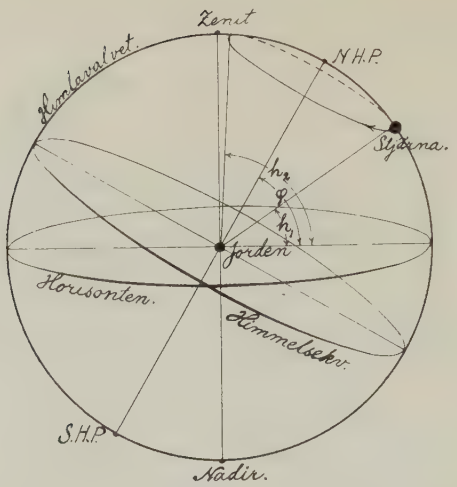
I stället för att beräkna ögonblicket för sann middag som i a) eller iakttaga det medelst gnomon som i b) kan man begagna sig av den i försök 1 och 5 bestämda och markerade meridianen.

7. *Bestämning av polhöjden* (tredje metoden).

Hjälpmedel: teodolit.

Polstjärnans (eller någon annan cirkumpolarstjärnas) höjd vid stjärnans övre och nedre kulmination (fig. 2) mätes med teodoliten. Ur de så erhållna höjdavläsningarna kan polhöjden lätt beräknas med hjälp av fig. 2, i vilken ellipsen kring *NIIP* föreställer cirkumpolarstjärnans bana i dess dagliga (skenbara) rörelse.

Omkring den 1 nov. har Polstjärnan nedre kulmination ung. kl. 11 e. m. Först ett halvår senare har den övre kulmination vid samma klockslag. Omkring den 13 maj har β i Lilla Björn nedre kulmination ung. kl. 11,30 e. m., omkring den 15 april har α i Stora Björn nedre kulmination omkring kl. 9,30 e. m.



Figur 2.

8. *Bestämning av longituden i förhållande till 15°-meridianen.*

Hjälpmedel: fickur med känd korrektion, gnomon, två vattenpass, Svenska Almanackan.

Om tidsskillnaden i förhållande till 15°-meridianen, vilken ju är den för vår borgerliga tid normerande, kan bestämmas, så är därmed longituden i förhållande till samma meridian möjlig att beräkna.

Tidsskillnaden erhålles på följande sätt. Gnomon injusteras över den på ett bord eller golv markerade meridianen (se försök 1 och 5), sedan den försetts med en ståndare, så lång att skuggan av dess spets faller utanför gnomonplattan. (Man kan även reda sig utan gnomon på det sätt, som angivits i försök 5). I ögonblicket för sann middag noteras tiden enligt fickuret. Medelst Svenska Almanackans uppgift om tidsekvationen kan tidsskillnaden därefter beräknas ur den i försök 4 åsyftade formeln, varefter man lätt kan uträkna longituden i förhållande till 15°-meridianen (och således även i förhållande till Greenwich-meridianen).

9. *Bestämning av ett stjärndygns längd.*

Hjälpmedel: a) teodolit, fickur med känd *dragning* eller b) ekvatoreal, fickur med känd *dragning* eller c) astronomisk tub, fickur med känd *dragning*.

a) Teodoliten inriktas mot en stjärna. Då denna synes i hårkorset, antecknas tiden. Instrumentet får därefter stå orubbat

under ett (eller flera) dygn, varefter tiden för samma stjärnas uppträdande i hårkorset ånyo noteras. Ur tidsavläsningarna kan stjärndygnets längd lätt beräknas.

I b) och c) är förfaringssättet detsamma som i a).

10. *Bestämning av en stjärnas deklination.*

Hjälpmedel: teodolit, Svenska Almanackan.

Med användning av den i försök 1 och 5 bestämda och markerade meridianen inriktas teodolitens kikare så noga som möjligt rakt i norr—söder, varefter instrumentets horisontalindex fastklämmes. Stjärnans höjd vid kulmination uppmätes och ortens polhöjd tages ur Svenska Almanackan. Ur fig. 1 kan då stjärnans deklination beräknas.

11. *Bestämning av en stjärnas rektascension.*

Hjälpmedel: a) teodolit, stjärntidsur med känd korrektion, eller b) teodolit, fickur med känd korrektion, Svenska Almanackan.

a) Teodoliten uppställes som i försök 10. När stjärnan synes i kikarens hårkors, alltså vid kulmination, avläses uret. Hur den så erhållna tidsuppgiften kan användas för bestämning av stjärnans rektascension, kan inhämtas ur läroböcker i astronomi.

b) Teodoliten uppställes som i försök 10. Då stjärnan synes i instrumentets hårkors, avläses uret (borgerliga tiden). Därefter beräknas motsvarande medeltid. Med användning av Svenska Almanackans uppgift om »stjärntid vid 0^{tim} medeltid» (midnatt) kan rektascensionen lätt beräknas, om man bortser från smärre korrektioner.

Forts.

Ett enkelt och effektivt sätt att avlägsna kvicksilverdroppar ur golvspringor.

Vid arbeten med kvicksilver händer det lätt, att det kommer ut därav på bord och golv och små droppar bli liggande kvar i golvspringorna. Större droppar kunna ju tagas upp med en kvicksilvertång men det är ej så lätt med de små fina dropparna, som vanligen även dölja sig i golvdammet. Ett synnerligen enkelt sätt att avlägsna kvicksilverdropparna är att rensa upp springorna med ett zinkbleck, som etsats med utspädd svavelsyra, varvid kvicksilverdropparna lätt fastna vid metallytan.

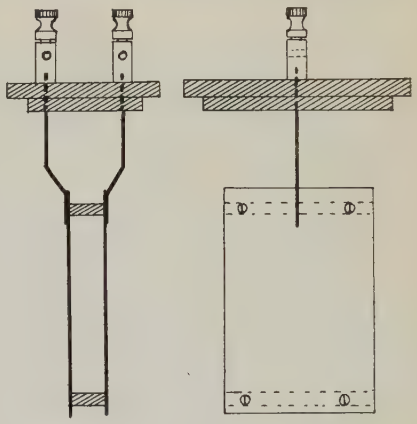
Bror Gustaver.

Elektrolyters ledningsförmåga.

Ett laborationsförsök.

Av **G. STARCK.**

I samband med genomgången av elektrolyters ledningsförmåga och dissociationsteorien äro självständiga bestämningar — laborationsvis — från elevernas sida av ledningsförmågan och dess ändring med utspädningen önskvärda. Då helst alla elever böra utföra försöket samtidigt, och materiell för regelrätt bestämning med växelström och telefon icke finnes i tillräcklig mängd för ett större antal laboranter vid förf:s läroverk, har jag försökt att utföra motståndsbestämningarna med en Wheatstones brygga, likström och galvanometer. För detta försök, som icke utföll obetingat lyckat, men icke heller motsatsen, skall här redogöras.



För att undvika polarisation vid elektrolysen valdes till föremål för motståndsbestämningarna en kopparsulfatlösning mellan kopparelektroder. Av stadigt kopparbleck förfärdigades två elektroder av storleken 4,5 × 6 cm, vilka fastskruvades vid och på ömse sidor om två ebonitlister, så att elektroderna fingo ett avstånd av c:a 1 cm (se fig.). Vid vardera elektroden fastlöddes en kraftig koppartråd, som fördes genom ett hål i ett ebonitlock och omedelbart på andra sidan genom lödning förenades med en klämskruv. Motståndskärlet var ett litet glastråg c:a 3 × 5 × 10 cm. Saltlösningarna tillverkades av läraren av analysrent kopparsulfat och vanligt destillerat vatten. Deras (ekvivalent)normaliteter voro 1,00, 0,50, 0,10, 0,05, 0,01; vid en försöksserie tillfogades 0,75, 0,25 och 0,075. Lösningarna hade vid försöken rumstemperatur (20°); inga anstalter vidtogos för att hålla temperaturen konstant.

Till jämförelsemotstånd användes dels ett litet reglerbart motstånd på 1 till 5 ohm, dels av adjunkt Löwenhamn för detta ända-

mål av motståndskordel förfärdigade och uppmätta motstånd på c:a 10, 20 och 75 ohm.

Ehuru vid elektrolysen ingen ändring av elektroderna och av lösningens totalkoncentration borde äga rum, inträder en tydlig polarisation, som medför en ganska avsevärd motståndsändring, om strömmen får vara sluten mer än kortast möjliga tid. Som belägg må anföras följande försöksserie.

$CuSO_4$, 0,50 n, jämförelsemotstånd 4 ohm, nifeackumulator med 10 ohms förkopplingsmotstånd. Strömmen var hela tiden sluten. Temp. 21°. I tabellen är *a* avläsningen på mättråden.

Tid i min.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
a i mm	585	557	541	532	528	524	520	518	516	514	513	508	505

Elektrolytens motstånd sjunker i början snabbt, men blir efter 10 min. något så när konstant. På grund härav tillämpades i en försöksserie metoden att låta eleverna taga det *a*-värde, som erhålles efter 10 minuters strömgenomgång. Detta förfaringssätt gav emellertid värden på den ekvivalenta ledningsförmågan, som väsentligt skilja sig från litteraturens, som följande tabell över en försöksserie (utförd av en elev) visar.

$\eta \cdot 10^3$	λ obs. (20°)	λ ber. (18°)
1,00	(25,8)	25,8
0,75	33,2	29,5
0,50	35,0	31,5
0,25	44,8	36,2
0,10	56,7	43,9
0,075	57,2	47,0
0,050	66,0	51,2

Ur de observerade motståndsvärdena har λ obs. beräknats på det sätt, att värdet 25,8 antagits gälla för den 1-normala lösningen även vid den rådande temperaturen. På grund av den ringa temperaturskillnaden kan detta förfaringssätt, även om lösningar av olika koncentration icke skulle hava exakt samma temperaturkoefficient, ej orsaka någon nämnvärd avvikelse från den ur litteraturen tagna kurvan.

Visserligen visar denna tabell tydligt nog det, som här är huvudsak, nämligen ekvivalenta ledningsförmågans ökning, men en bättre överensstämmelse med verkligheten vore önskvärd. Följande arbetsmetod gav betydligt bättre resultat.

Ackumulatorströmmen slöts under så kort stund som möjligt för att en preliminär inställning av bryggkontakten skulle erhållas. Därpå bröts strömmen (fjädrande strömbrytare), och man väntade några minuter, varunder elektrolysbadet var slutet genom

bryggan och lösningen omrördes några gånger med elektrodernas hjälp. Därpå slöts strömmen ånyo ett ögonblick, varunder man gjorde den jämkning av bryggkontakten, som kunde erfordras. Detta upprepades, tills ett något så när konstant värde erhållits. Ungefär på detta sätt arbetande, erhöll en elev (λ' obs):

$\eta \cdot 10^3$	λ' obs.	λ ber.	λ'' obs.
1,00	(25,8)	25,8	(25,8)
0,50	30,4	31,5	31,1
0,10	44,9	43,9	42,0
0,05	50,0	51,2	50,2
0,01	74,2	72,2	62,2

Medeltalet för den avdelning av 8 elever, som arbetade enligt principen hastig bestämning, återfinnes i den sista kolumnen av ovanstående tabell (λ''obs.). Avvikelserna från medeltalen voro i vissa fall högst betydande.

Jämte de metodiska anmärkningarna mot dessa försök kan man mot dem även rikta den invändningen, att kopparsulfat hör till den elektrolyttyp, som ej särskilt lyckligt illustrerar dissociationsteorien. Utan tvivel skulle ett mera grundligt studium av olika möjligheter, vartill tid saknats, kunna ge uppslag till ännu bättre försök på detta område.

Några egenskaper hos fosfor.

Fosfor gäller med rätta för att vara ett ganska »konstigt» ämne med förmåga att ingiva kemisten respekt. Då de böcker jag själv äger och läst alls ej sysselsätta sig med de egenskaper hos ämnet, som jag nu har i tankarna, förmodar jag att ett omnämnande kan vara på sin plats.

Som apotekselev för många år sedan skulle jag framställa fosformos och hölls med fosforn på en målad fönsterpost. Jag tappade en bit på fönsterposten, och den tände genast. Den var ej stor och slocknade snart. Jag städade efter mig och trodde, att allt var bra. Ett par år efteråt tyckte jag, att färgen i samma fönster såg uppsvälld ut, och jag petade litet med en kniv. Genast började det att brinna. Jag erinrade mig missödet med fosforn två år tidigare och förstod, att fosforn legat inkapslad i två år, ett ganska egendomligt förhållande.

På kemikum vid Luleå läroverk hände mig för några år sedan under en lektion något liknande, som föreföll mig minst lika märkvärdigt. Jag skulle förflytta en liten flisa fosfor från katedern till vasken för att förstöra den, men jag råkade fumla, så att biten föll i golvet. Den tände genast och kastade omkring sig brinnande

droppar, som i sin tur måste ha kastat omkring sig brinnande droppar enligt vad jag sedan förstått. Det fåtal små eldar, som vi sågo, slocknade mycket snart. Vi torkade golvet (korkmattan), där biten hade fallit, och trodde att allting var bra. Det ringde, och klassen lämnade rummet. Vi släckte ljuset och skulle gå, jag och ett par pojkar som blivit kvar. Då observerade jag, att det gnistrade under fötterna på en av dem. Jag förstod genast, att det var missödet med fosforn, som gick igen, och det kändes kusligt att erfara, att det fanns fosfor på golvet. Vad kunde ej ha hänt, om ej saken blivit upptäckt. Nu förstår jag, att faran var ganska liten. Vi började emellertid syna golvet, och varhelst vi satte fötterna på en meters avstånd från den plats, där fosforflisan hade fallit, gnistrade det under fötterna på oss. Det var små gnistor i hundratal.

Häromdagen fick jag under en lektion förklaring på fenomenen, och det experiment, som ledde till förklaringen, synes mig vara av den art, att det bör göras i varje skola så snart det blir fråga om att visa fosforns egenskaper. Vi lade en bit fosfor på en plåt och tände den. Den starkt lysande lågan är värd sin förklaring. Den lyser av glödande partiklar av fosforpentoxid, liksom en kolhaltig låga lyser av kolpartiklar. Och den starka vita röken, som är oerhört mäktig i förhållande till fosformängderna, torde i vanliga fall riktigast förklaras som fosforpentoxid, vilken förenar sig med luftens vatten till fosforsyredroppar. Antagligen skulle röken bli mindre mäktig, om luften vore alldeles vattenfri. Sedan fosforn slocknat, kvarblir en rest av fosforpentoxid, rödaktig genom inblandning av röd fosfor som också bildats. Skrapa vi på denna rest med en kniv, så börjar det att brinna igen. Här få vi nu förklaringen till de fenomen, som jag skildrat. Fosforn omger sig, när den brinner, med ett lager av fosforpentoxid och röd fosfor, som hindrar luftens tillträde. Därför slocknar lågan innan fosforn är slutbränd. Fosforn i fönsterposten och fosforn på laboratoriegolvet skyddades mot fortsatt oxidation av ett hölje av utomordentlig effektivitet.

Saken för tanken till bly, som ju omger sig med en hinna, vilken effektivt förhindrar oxidation. Det vore förtjänt av en undersökning, hur i verkligheten fosfor förhåller sig i torr luft. Det låter sig väl tänkas, att den i torr luft vid låg temperatur omger sig med en effektiv skyddshinna liksom blyet.

Fosformos är en gröt, vanligen rågmjölsgröt, i vilken man rört in finfördelad fosfor. Finfördelningen av fosforn sker lämpligen på så vis, att man smälter fosforn i utspädd lösning av gummi arabicum och skakar. För råttor och kråkor är fosformos en delika-

tess, som man ej behöver krusa bort, och antagligen skulle de begärligt äta direkt ur burken, om de finge. Man brukar lägga det i bröd, fisk eller kött och spika fast betet, om man är rädd för tändning genom att råttorna draga omkring fosformoset. Och erfarenheten har lärt oss, att fosformoset är förvånansvärt hållbart. Vi inse nu av det jag ovan anfört, att hållbarheten har sin förklaring i den skyddshinna, varmed fosforpartiklar omgiva sig. Och även inse vi, att faran för antändning genom fosformos är liten eller ingen, ty antändningen av fosforpartiklarna försvåras av skyddshinnan.

Ett annat intressant försök med fosfor råkade vi händelsevis upptäcka under samma lektion. Vi smälte fosfor i en skål med vatten. Kanske skadar det ej att nämna, att det var avfallsbitar från fosforburkens botten. Sedan skulle jag visa, att fosforn av en vattenstråle sönderdelas i droppar, som stelna var för sig. Experimentet misslyckades, ty dropparna flöto ihop. Vattnet var taget ur vattenledningen och hade rumstemperatur. Skålen kändes ej varm. Alltså var fosforn överkyld utan att stelna. Vi hällde av det mesta vattnet och fördelade åter fosforn med en stråle ur vattenledningen, men åter flöto dropparna ihop. En termometer visade c:a 20°. Fosforn, som smälter vid 44°, var alltså 24° överkyld. Det ringde och skålen med vatten och fosfor ställdes undan. En kort stund efteråt hade fosforn stelnat.

Nästa lektion smälte vi samma fosformängd igen, och allt förhöll sig som förut. Termometern visade även nu 20°. På försök släppte vi ner i skålen en liten flisa av fosfor. Den flytande fosforn stelnade ögonblickligen vid beröring med den fasta.

Under dessa försök hände det upprepade gånger, att små mängder fosfor stego upp till vattenytan och blevo simmande som en tunn skiva. I kallt vatten syrsattes den helt sakta av luften, avgivande svag rök och lukt. I varmare vatten tände den och brann, företrädesvis i kanten, emedan fosforpentoxiden där bäst skaffas undan. Den brinnande fosforskivan förflyttade sig på samma sätt som natrium brukar göra, men utan knalleffekt. Av möjliga anledningar till att fosforbitarna hålla sig flytande kunna nämnas: strömningar i vattnet i förening med en ganska ringa täthetsskillnad, bildning av fosforgas (fosfors ångtryck är vid 50° 0,3 mm, vid 100° 3,68 mm), bildning av vätgas eller fosforväte genom reaktion med vattnet, upplyftning medelst på fosforbitarna avsatta luftblåsor.

Vid försök att upprepa dessa experiment, har överkylningen vanligen inskränkt sig till 14°, och det har visat sig vara ganska svårt att på beställning få fosforn att flyta. *Herman Svenonius.*

Bokanmälningar.

A. S. Eddington, *Den materiella världens väsende.* Band XXXIX i serien »Vetenskap och bildning», Albert Bonniers förlag 1931, 342 sid., häft. kr. 7:50.

Boken utgöres huvudsakligen av föreläsningar, hållna i Edinburgh under januari—mars 1927. Författaren har bibehållit samtalstonen från föreläsningssalen, som han säger, därför att »många delar av ämnet äro i sig själv så svåra, att mitt enda hopp att bli förstådd har varit att avgiva mina förklaringar så, som om jag stått inför en frågande person.»

De första elva kapitlen ge en skildring av de senaste årens revolutioner inom fysiken — den speciella relativitetsteorien, som låter oss skärskåda tidsbegreppet från en ny synpunkt — entropilagen, som anger riktningen för världens utveckling — den allmänna relativitetsteorien med dess beskrivning på gravitationen — kvantateorien och dess konflikt med de klassiska föreställningarna om ljuset — Heisenbergs, Diracs och Schrödingers idéer, som föra oss fram till indeterminationsprincipen. Det skulle vara falskt att påstå, att denna framställning är lättfattlig, och det är väl inte heller möjligt, att någon, vem det vara månde, utan mödosamt tankearbete kan sätta sig in i dessa utomordentligt svåra spörsmål. Men Eddington har den stora förtjänsten, att han skriver ledigt och framställer allting på ett underhållande och roligt sätt; man har aldrig ledsamt i hans sällskap. Om också innehållet på många ställen är svårfattligt, ryckes läsaren dock med och får i alla händelser en inblick i de nya problemen. Man blir kanske inte alltid enig med författaren, men det betyder mindre; man lockas i alla fall att fundera över de nya frågorna och försöka att själv skaffa sig en åsikt.

Sedan Eddington sålunda i elva intressanta kapitel bibringat läsaren en uppfattning om den moderna vetenskapens syn på världen, söker han i de fyra sista att skildra naturvetenskapens ställning i förhållande till mer allmänna synpunkter. Han visar oss den fysikaliska kunskapens begränsning, diskuterar skillnaden mellan det reella och det konkreta och kommer sedan in på den modernaste fysikens uppfattning av orsakssammanhanget. Vi be-

träda filosofiens marker och snudda vid problemet om den fria viljan. Det sista kapitlet »Vetenskap och mystik» behandlar de områden, som ligga utanför fysikens och matematikens värld, men vilka dock måste äga lika hög grad av realitet. Under det att 1800-talets naturvetenskapsmän ännu trodde på möjligheten av en mekanisk världsförklaring och en fullkomligt materialistisk syn på världen och livet, ha den nuvarande tidens forskare börjat inse, att en sådan icke endast är ensidig utan antagligen omöjlig. Fysiken sysslar blott med en begränsad del av verkligheten, men det finns också en annan realitet — en andlig värld, som vi bygga upp ur symboler, hämtade från vår egen personlighet.

Eddington nämner i företalet, att han varit tveksam om lämpligheten för en vetenskapsman att våga sig så långt in på ett område, som ligger utanför vetenskapen. Läsaren är honom tacksam för att han vågat försöket. Det moderna vetenskapliga tänkandets filosofiska riktning avviker markant från de synpunkter, som gällde trettio år tillbaka i tiden. Ingen, som vill förstå den nya naturvetenskapen, bör stå främmande för dessa nya uppfattningar. Eddingtons bok ger en mer fullödig skildring av den moderna fysiken än något annat populärt arbete, som utgivits i Sverige under de senaste åren. Den förtjänar i hög grad att läsas och begrundas.

Anna Beckman.

Isaac Newton, *Naturvetenskapens matematiska principer.* Svensk översättning av C. V. L. Charlier. C. W. K. Gleerup, Lund 1931. Andra boken, XII + 194 sid., häft. kr. 10: —. Tredje boken, VII + 158 sid., häft. kr. 7: 50.

Professor Charliers översättning av Newtons Principia föreligger nu komplett, sedan även andra och tredje boken utkommit. Den på svenska tryckta naturvetenskapliga litteraturen har därmed fått ett ytterst värdefullt tillskott, och det är särskilt glädjande, att verket fått en tolkare med prof. Charliers kvalifikationer.

Då första boken utkom, lämnades i denna tidskrift (årg. 11, sid. 173) en översiktlig redogörelse för verkets uppställning och innehåll. Vid studiet av detsamma förstärkes ständigt intrycket av, i vilken eminent grad Newton varit vägvisare för följande generationer av forskare. Knappast några av hans frågeställningar förefalla föråldrade. Största delen av Principias resultat höra alltjämt till den nödvändiga vetenskapliga utrustningen för varje idkare av de exakta naturvetenskaperna.

Endast Newtons geometriska framställningssätt verkar mera främmande på en modern läsare. Fastän långt ifrån lättläst har det dock den fördelen att icke förutsätta några större matematiska förkunskaper hos läsaren. Newtons deduktioner äro dessutom, även för den, som lärt sig härleda resultaten på analytisk väg, mycket lärorika.

En stor del av innehållet i tredje boken, vilken handlar om världssystemet, är ganska lätt tillgänglig. Newton säger, att han hade författat denna bok »på ett populärt sätt, så att den skulle kunna läsas av många. Men då det skulle bli svårt för dem, som ej tillräckligt förstå de grundläggande principerna, att uppfatta styrkan i slutsatserna och bortlägga de fördomar, vid vilka de varit vanda sedan många år tillbaka, och på det att innehållet ej må indragas i disputationer, har jag sammanfört innehållet i denna bok i propositioner på matematiskt sätt, så att de blott må läsas av dem, som förut studerat principerna.»

De nu utkomna delarna prydas av tre fotografiska reproduktioner av i privat ägo befintliga Newtonporträtt. Två av dessa porträtt äro målade resp. år 1689 och 1702 av Godfrey Kneller, det tredje, som föreställer Newton på äldre dagar, av James Thornhill. Utstyrsel och tryck äro även i övrigt utmärkta.

D. Enskog.

Sigurd Eriksson, *Lärobok i matematik för tekniska läroverk.* Del I, Örebro 1931, Lindhska Bokhandeln, 106 sid., kr. 3: 50.

Första delen av lektor Erikssons lärobok i matematik, vars andra del tidigare här recenserats, föreligger nu i tryck. Denna nya del omfattar den för våra tekniska läroverk i stort sett gemensamma kursen i algebra (utom serier), planimetri, likformighetslära och trigonometri. Härigenom ha de fyra läroböcker, som tidigare vanligen använts vid genomgången av denna lärokurs, blivit ersatta med en enda, vilket för såväl elever som lärare innebär en stor vinst. Den nya läroboken innehåller dock ej såsom de förut använda tillräckligt med exempel för övningsräkning. Det blir därför nödvändigt att vid sidan använda särskild exempelsamling.

Författarens behandling av lärostoffet är i stort sett den gängse. En del av de planimetriska satserna härledas dock med hjälp av trigonometri, en metod som tidigare i ännu större utsträckning använts av lektor O. Josephson. Boken inledes med en del exempel på felberäkning, belysande de enklaste lagarna för dylik räkning.

Einar Friman.

Yrkespedagogiska centralanstaltens kompendier. Matematiska uppgifter givna i provskrivningar vid tekniska läroverk. På uppdrag av Kungl. Skolöverstyrelsen redigerade av S. I. Nydell. Del I. Uppgifter i geometri och trigonometri, Stockholm 1929, 88 sid. Del II. Uppgifter i algebra, analytisk geometri och infinitesimalkalkyl, Stockholm 1931, 77 sid. Varje del kr. 2: — jämte facit à 25 öre.

Dessa exempelsamlingar ha tillkommit för att tjäna de tekniska läroverken och komma där säkerligen att hälsas med stor tillfredsställelse, men även vid de allmänna läroverken har man all anledning att uppmärksamma dem. De lämpa sig utomordentligt väl att sätta i händerna på en elev, som vill träna till en skrivning, och även en lärare kan här — åtminstone på vissa kapitel — få åtskilliga goda uppslag. Del II går något längre än gymnasiekursen (integralkalkyl), men även det kan vara av värde nu i det enskilda arbetets tid.

Enligt företalet ha utgivarne begärt upplysning om, huruvida uppgifterna äro original eller ej. Det är skada att upplysning i detta avseende ej lämnas i böckerna. De efter en del exempel förekommande lärarsignaturerna äro nämligen ej författarsignaturer. På vissa områden tycks det mesta vara nytt, på andra kan man känna igen exempel efter exempel. Så har jag t. ex. på kapitlet logaritmer funnit härstamningen till 19 av 26 exempel i följd, på serier till 21 av 27. Detta tycks dock vara undantag.

Böckerna, vilkas billiga pris är värt att observera, rekvireras hos Skolöverstyrelsen, Yrkesskoleavdelningen.

Bengt E. Nyström.

Elektroteknikens grunder. Del I. Elektricitetslära, 108 sid., 1925, inb. kr. 1: 50. Del II. Radioteknik, 203 sid., 1927, inb. kr. 2: 25. Del III. Elektrisk anläggningsteknik, 175 sid., 1929, inb. kr. 2: —.

Undertecknad vill härmed fästa uppmärksamheten på ovanstående arbete, utgivet på Kungl. Maj:ts uppdrag på lantförsvarets kommandoexpeditions bokförlag. Böckerna äro tydligen avsedda att användas vid militära skolor för utbildning av radiopersonal m. m. Författaren är anonym, men det är tydligen en mycket god pedagog, som här fört pennan. Som särskilt välskrivna kapitel kunna nämnas: kraftfält i del I, ackumulatorer i del I och del III, elektriska lampor i del III, elektrisk mätteknik i del I, elektromagnetiska svängningar och vågor i del II. Arbetet är försett med över 400 bilder, de flesta synnerligen tydliga och överskådliga. Böckerna äro väl lämpade att sättas i händerna på sådana elever, som önska »enskilt arbete» i fysik i ring III och IV. Även

om del I och III ej kunna ersätta våra vid läroverken nu använda läroböcker i elektricitetslära, så innehålla de i varje fall många praktiska vinkar och uppslag, som vi lärare kunna ha intresse att taga del av. Böckerna (även enstaka delar) erhållas pr postförskott efter rekvisition från Lantförsvarets kommandoexpedition, Stockholm 2.

J. Sundqvist.

C. Rendahl och B. Söderborg, *Astronomi.* 4:de upplagan. Svenska Bokförlaget, Stockholm 1931. 80 sid., kart. kr. 2: —.

Denna lärobok har utkommit i ny, något förkortad upplaga. De i tidigare upplagor förekommande kapitlen om olika koordinatsystem jämte därmed sammanhängande exempel ha strukits, en åtgärd, som måste anses välbefogad, då det för överskådlighetens skull är av stor vikt, att en lärobok ej innehåller alltför mycket av sådan finstilt text, som oftast av brist på tid måste lämnas »till lärjungarnas självstudium».

Ett par detaljanmärkningar må här anföras: Polarkalotterna på Mars (sid. 59) hava påvisats vara atmosfäriska bildningar (moln) och ej rimfrost. Avstånden till de ljusstarkaste spiralnebulosorna (sid. 79) äro åtminstone till storleksordningen rätt väl kända och med ungefär samma procentuella noggrannhet som t. ex. till de klotformiga stjärnhoparna. Att vidare i en elementär astronomilärobok upptaga rödförskjutningen inom spiralnebulosornas spektra såsom en ren Dopplereffekt (sid. 80) kan tyckas något djärvt, isynnerhet som här ej förutsättningen, rödförskjutningen, omtalas utan endast slutsatsen, d. v. s. den positiva hastigheten. De ovannämnda anmärkningarna ha emellertid ingen större betydelse för läroboken såsom sådan. Den är liksom de föregående upplagorna en god och lättläst lärobok.

Algot Jenvall.

Kosmos, *Fysiska uppsatser,* Bd 9, Utgivna av Svenska Fysikersamfundet. P. A. Norstedt & Söner (i distribution), Stockholm 1931, 237 sid. I bokhandeln häft. kr. 10: —. Medlemskap, årsavg. kr. 10: —, medför rätt till ett bundet ex. Anmälan till prof. G. Borelius, Tekniska Högskolan, Stockholm.

Årsboken inledes med fil. lic. Anna Beckmans välskrivna och fängslande framställning av Faradays liv och verksamhet i vetenskapens tjänst. Sin berömdaste upptäckt, den elektromagnetiska induktionen, publicerade han i nov. 1831, således för 100 år sedan. Tolv år tidigare hade Örsted funnit, att en elektrisk ström skapar

ett magnetiskt fält kring sig. Det var flere års målmedvetet sökande efter omvändningen av detta fenomen, som den 29 augusti nämnda år kröntes med framgång. Örsted och Faraday äro tvenne den fysiska forskningens stormän, vilkas gärning kommit att få en mer revolutionerande inverkan på människornas liv än någonsin en politisk omvälvning kunnat åvägabringa. Man läser med stigande intresse från början till slut fru Beckmans sakrika och medryckande skildring av Faradays forskaregärning på de mest skilda områden av fysiken.

Fil. dr. S. Benner refererar därefter egna och andras undersökningar över elektronernas egensvängningar i magnetiska och elektriska fält vid växlande jon- och elektronkoncentration. I det jordmagnetiska fältet exempelvis ha elektronerna en resonansfrekvens, som svarar emot 200 m våglängd, ett för radion betydelsefullt förhållande. I växelfältet mellan kondensatorplattor kunna även dylika resonanssvängningar påvisas. Ett speciellt intresse erbjuda de spontant uppträdande jon- och elektronsvängningarna, vilka säkerligen äro viktiga förutsättningar för uppkomsten av en del egendomliga gasurladdningsfenomen, t. ex. den s. k. lågspänningsbågen, som t. o. m. kan brinna vid en polspänning understigande den lägsta spänning, som förmår aktivera atomerna.

I en följande uppsats beskriver prof. O. Klein vågföreställningens betydelse för atomteorien, en sida av kvantmekaniken, som i främsta rummet utvecklats av fransmannen de Broglie och österrikaren Schrödinger. Liksom för hundra år sedan ljusets interferens och böjning satte en gräns för den geometriska optiken och nödvändiggjorde införandet av vågföreställningen, så skapar i våra dagar den i kvantteorien samlade kunskapen om atomprocesserna en liknande situation, i det atomernas stationära tillstånd torde böra uppfattas som ett slags interferensfenomen. Liksom man uppnådde en sträng behandling av de optiska fenomenen först efter det Kirchhoff infört den s. k. vågekvationen inom optiken, så har nu Schrödinger genom införandet av en motsvarande differentialekvation för kvantmekaniken givit en ny metod för behandlingen av atomteorien. Klein redogör för några viktiga användningar av vågekvationen. Den klara och utan besvärlig matematisk apparat utformade framställningen kan av envar läsas med verklig behållning.

Isläggningen av våra sjöar och älvar, som docent Olaf Devik studerat, erbjuder flere ur fysikalisk synpunkt intressanta fenomen. Vattnet i ytlagret underkyles. I stillastående vatten inträder sedan normal isbildning uppifrån; i rinnande vatten däremot

kunna virvlar bildas, som stundom föra det underkylda vattnet ned till strömfårans botten, där kristallisation försiggår och koralliknande bildningar uppstå. Devik har iakttagit, hur bottnen i en älv på så sätt höjts 2 meter. Blir kölden sedan mycket stark, inträder isläggning på ytan, underkylningen upphör och bottenislagret smälter helt, eller älven skär sig ned genom bottenislagret, bildande kanaler mellan kvarliggande meterhög bottenis.

Docent E. Rudbergs uppsats om elektronstötfenomenen återför oss till atomfysiken. Då elektronstötfenomenens forskningsområde genom Franck och Hertz' nya metodik på sin tid fick en alldeles utomordentlig betydelse var det därför, att det öppnade en oväntad och ny väg till experimentellt studium av atomernas energitillstånd och övergångarna dem emellan. De stora förhoppningar, som då sattes till denna nya forskningsgren, ha ej heller kommit på skam. Undersökningarna över elektronstötfenomenen komplettera på ett verkningsfullt sätt de optiska och röntgenmetoderna för studiet av atomernas byggnad. De ej blott bekräfta många på spektroskopisk väg vunna resultat utan bringa därjämte i dagen helt nya fakta, som blivit av stor betydelse för utformningen av teorierna för atomernas och molekylernas byggnad. Rudbergs framställning är en sakkunnig och lättläst orientering över det vidsträckta området.

Prof. The Svedberg för oss in på sitt världsberömda ultracentrifuglaboratorium, demonstrerar försökstekniken och låter oss få se, hur man där på en kort stund kan avgöra, om ett ämne är en enhetlig substans eller en blandning samt hur man av sedimentationshastigheten i centrifugalfält — upp till 250 000 gånger tyngden — kan bestämma de högmolekylära ämnenas molekylarvikt. Så t. ex. är insulins molekylarvikt 35 100, hemoglobins 68 000, ett tredje ämne ståtar med den ansenliga molekylarvikten 5 millioner. Svedberg uttalar till sist förhoppningen att snart även kunna studera associations- och dissociationstillstånden i lösningar av vanliga lågmolekylära ämnen!

Dr. B. Trumpy har i absorbtionsspektrum undersökt intensitetsförloppet i Li:s huvudserie vid 1 000° temp. I likhet med vad förut konstaterats för Na är linjeintensiteten omvänt prop. mot kuben på huvudkvanttalet utom för de lägre kvanttalen, där Li visar en egendomlig avvikelse. Vid seriegränsen sätter som bekant en kontinuerlig absorption in, betingad av där inträdande jonisationsprocess, i det elektroner då slungas helt bort från atomen. De vunna resultaten synas utmärkt väl stämma med kvantmekanikens fordringar, tillämpade på Li- och Na-atomerna.

Prof. A. Westgren har bidragit med en uppsats om röntgen-

kristallografiska undersökningar av legeringars konstitution. Den röntgenkristallografiska analysen har blivit ett av metallografiens allra viktigaste hjälpmedel. Varje fas i ett metalliskt system utgör ju en särskild kristallart och ger därför upphov till en för densamma karaktäristisk linjeserie i pulverfotogrammen. Det är ett vackert arbete av svensk forskning över legeringars kristallbyggnad, strukturanalogier mellan olika metallsystem etc. för vilket här redogöres. Bl. a. har genom kristallanalys av en Heusslers legering fastställts det märkliga förhållandet, att av de i denna ingående omagnetiska beståndsdelarna bl. a. bildas en förening Cu_2Mn Al, som ensam befinnes vara bärare av de starkt ferromagnetiska egenskaperna hos denna egendomliga legering.

Årsboken avslutas med en efter anmälarens mening onödigt vidlyftig historisk framställning över television, förf. av civiling. Hj. Sundberg. Läsaren får emellertid intrycket av att den stund snart är inne, då de mycket stora fysikalisk-tekniska svårigheterna äro övervunna.

Som helhet betraktad utgör Kosmos nionde årgång i likhet med sina föregångare en värdefull nyårsgåva till den fysiska forskningens vänner och idkare i Norden.

Martin Sjöström.

Uppfinningarnas bok. Del VI. Vattenbyggnader, navigation, skeppsbyggnad, luftfart. P. A. Norstedt & Söners förlag, 1931, 1264 sid., klotb. kr. 35: —, halvfr. kr. 40: —.

Följande rubriker må ge en föreställning om det rikhaltiga innehållet: Vattenvägar, Hamnarnas tekniska anordning, Inre vattenvägar, Flottningsteknik, Vattenavlopp, Vattenledningar, Vattenkraftanläggningar, Fiskvägar, Vattenkraftmaskiner och pumpar, Navigation (i äldre och nyare tid), Skeppsbyggnadskonstens historia, Deplacement, Stabilitet, Framdrivning och styrning, Nutida skepps- och båttyper, Bärgning och reperation, Atmosfärens allm. egenskaper, Den aerodynamiska forskningen, Systemen lättare än luft och tyngre än luft, Svenska insatser på flygteknikens område.

Liksom i tidigare utkomna delar är behandlingen grundlig och för dess vederhäftighet borga författarenamnen. Den tyngande detaljrikedom, som utmärkt många av verkets delar är ej så påfallande här. Även icke-fackmannen kan med god behållning lätt tillägna sig väsentliga delar av innehållet, som ju omfattar mycket av allmänt och stort intresse. — Nu återstå av verkets planerade nio delar blott två, av vilka man med särskilt intresse motser den första om Naturvetenskapliga grunder.

Från kunskapens fält, P. A. Norstedt & Söners förlag.

Angående denna lilla bokseries syftemål och några av de tidigare utkomna häftena hänvisas till tidskriftens septembernr sid. 171. Nu föreligga några nya häften. Axel Wallén, Hur en väderleksrapport kommer till. Den lilla volymen (60 sid.) ger några data ur väderleksförutsägelsernas historia och om meteorologiska observationsstationer, beskriver väderlekstelegrammens chiffersystem och sammanställning och hur observationerna löpa in till väderlekstjänsten och där bearbetas, och hur kartor göras upp och prognosen ställes. Häftet avslutas med några exempel på olika väderlekssituationer och med några ord om förutsägelsernas tillförlitlighet. — Sal. Vinberg, Modernt transportväsen. Behandlar väg-, järnvägs-, sjö- och lufttransporter och ger allt vad man kan begära av en 63-sidig översikt av ett så omfattande ämne. Häftena kosta kr. 0: 80.

Torsten Althin, *Flygkrönika.* Wahlström och Widstrand, Stockholm 1931, 61 sid., kr. 2: —.

Det framförallt värdefulla i dessa »små bilder och notiser ur luftfartens historia» är det synnerligen vackra och intressanta illustrationsmaterialet. Tack vare detta är det lilla häftet verkligt roande och instruktivt.

Lindståhls tekniska bokkatalog 1931. Henrik Lindståhls bokhandel, Odeng. 22, Stockholm. 53 sid.

Innehåller ett urval av den nyare svenska, norska och danska litteraturen på teknikens olika områden (med angivna priser): matematik, fysik, kemi, elektroteknik, maskinteknik, automobil-, trafik- och flygväsen, byggnadskonst, bergsvetenskap. Därjämte en förteckning på skrifter utgivna av Ingenjörsvetenskapsakademien. — Den lilla bokförteckningen är icke fullständig och gör ej heller anspråk på att vara det men ger icke desto mindre en rätt god orientering på området.

Gradualavhandlingar.[1]

Erik Ekefors, *Vakuumfunkspektren von Kalium und Calcium im Gebiete 100 bis 1100 Å.* Zeitschrift für Physik, Bd 71, Berlin 1931, 38 sid. Disp. i Upsala 14 september 1931. Opponenter: laborator Bengt Beckman och fil. mag. Bengt Edlén.

Sedan Millikan för c:a 15 år sedan lyckades erhålla kortvågiga spektra med vakuumgnistan som ljuskälla i en konkavgitterspektrograf, har denna ljuskälla använts vid många spektrografiska undersökningar. Tekniken har ju så småningom förbättrats, och på sista tiden har man genom användande av konkavgitterspektrografer för strykande incidens kommit att allt bättre behärska det kortvågigaste området av optiska spektra.

Vid denna undersökning ha spektra för kalium och kalcium i det angivna området (100—1100 Å. E.) uppmätts med största möjliga noggrannhet. Dessa ämnens gnistspektra äro för astrofysiken av mycket stor betydelse. Vid undersökningen användes en vakuumspektrograf med konkavgitter vid strykande incidens (infallsvinkel ung. 84°). Tack vare den stora dispersionen och goda skärpan har det varit möjligt att väsentligt utöka våglängdsmaterialet för de undersökta ämnena; linjer, som förut angivits såsom enkla, ha i en del fall kunnat upplösas i komponenter, och många nya linjer ha tillkommit. Tabellerna omfatta c:a 1400 linjer. Som ljuskälla har använts vakuumgnista av hög spänning och med parallellkopplad kapacitet. Intensiteten hos vakuumgnistan var mycket god; i vissa fall gav endast ett tiotal gnistor tillräcklig exponering. Spöken — d. v. s. linjer, som gruppera sig på ett ofta mycket regelbundet sätt omkring den verkliga spektrallinjen utan att därför motsvara verkliga våglängder — uppträdde rätt ymnigt men voro vid någorlunda måttlig exponering ej så besvärande. Spaltvidden måste hållas rätt liten: 0,006—0,001 mm. Ljuskällan kan drivas i högsta vakuum, vilket också är nödvändigt, eftersom ifrågavarande strålning skulle absorberas, om inte strålgången helt vore förlagd i vakuum. De spektra, som erhållas, motsvara, på grund av gnistans kraftiga joniseringsverkan, relativt höga joniseringsstadier. I kaliums spektrum finner man sålunda endast några svaga K II (K^+)-linjer men rätt många K III (K^{++})-linjer. Det övervägande flertalet linjer tillhör emellertid högre joniseringsstadier: K IV, K V, o. s. v. Det har här icke varit möjligt att direkt hän-

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

föra observerade linjer till resp. spektra, K IV, K V, o. s. v. Dock har det låtit sig göra — att med användande av självinduktion i serie med gnistan — åstadkomma en gradering av linjerna med avseende på joniseringen. Någon termklassificering kunde under nuvarande förhållanden icke ifrågasättas.

I närmast följande referat över en liknande undersökning utförd vid samma institution är det experimentella utförligare behandlat.

GUSTAF ARVIDSSON, *Wellenlängenmessungen in den höheren Funkenspektren von Blei und Wismut im äussersten Ultraviolett.* Leipzig 1932, i utdrag i Annalen der Physik Band 12 (1932). Disp. i Uppsala den 29 jan. 1932. Opponenter: laborator BENGT BECKMAN och fil. mag. JONAS SÖDERQVIST.

De senaste årens arbeten inom den optiska spektroskopien ha i stor utsträckning sysslat med elementens högre gnistspektra. Enligt atomteorien härröra dessa från strålning, som utsändes vid elektronövergångar inom joniserade eller »skalade» atomer, d. v. s. sådana som berövats ett mindre eller större antal av de elektroner, som tillkomma dem i neutralt tillstånd. Med ett spektrum tillhörande Pb III menar man strålning från blyatomer, som tappat två elektroner, med Pb IV strålning från tredubbelt joniserade atomer o. s. v.

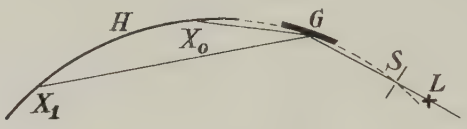
Enligt den »spektroskopiska förskjutningslagen» ger en atom med atomnumret Z ett spektrum med mycket nära samma byggnad som en ett steg högre joniserad atom med atomnumret $Z + 1$. Båda dessa ha ju samma antal elektroner, vilket förklarar likheten. Då atomen tappar elektroner, blir emellerid dess positiva laddning allt starkare. Detta medför starkare elektriska fält och därmed högre energinivåer. Energidifferenserna mellan analoga nivåer bli då också större, varav följer, att spektrallinjerna flyttas ned mot allt kortare våglängder. En dylik serie med samma elektronkonfiguration är t. ex. Au I, Hg II, Tl III, Pb IV, Bi V. Som exempel kan nämnas, att en av de starkaste linjerna i dessa spektra, nämligen den som svarar mot övergång från den lägsta triplettnivån till den lägsta singulettnivån, har för de olika spektra följande värden resp. 2676, 1942, 1559, 1313, 1140 Å.

De experimentella förutsättningarna för undersökning av ifrågavarande spektra äro en ljuskälla, där de strålande atomerna ha stor benägenhet att joniseras och en spektrograf lämplig för upptagningar ända ned i det yttersta ultravioletta våglängdsområdet. De senaste fyra åren har vid fysiska institutionen i Uppsala arbe-

tats mycket på detta område (se MANNE SIEGBAHN, Kosmos 1930, sid. 164).

I föreliggande arbete publiceras våglängdsmätningar i området 1400—200 Å; för bly omkring 1200 linjer och för vismut omkring 1000 linjer. Av dessa förelågo förut för bly ganska fullständiga mätningar i området över 800 Å, under det mätningarna för vismut för hela området voro mycket ofullständiga.

Som ljuskälla har använts en starkt kondenserad gnista i vacuum (»hot spare»). Det med gnistan parallellkopplade kondensatorbatteriet, vars kapacitet i allmänhet var omkring 1 μF, uppladdades över ett likriktarrör till omkring 60 kV, då urladdning skedde mellan två urborrade aluminiumelektroder, i vilka det undersökta ämnet placerats. Denna gnista befann sig omedelbart framför spalten i spektrografen. Vacuumgraden var av sådan storlek, att elektroderna måste närmas till ett avstånd på omkring 1 mm, för att urladdning skulle inträda. Vid insättning av större



självinduktion i gnistkretsen minskas joniseringen. Författaren har begagnat sig härav för att i någon mån redan genom försöksbetingelserna avgöra till vilket jonisationstillstånd de olika linjerna hänföra sig. För detta ändamål har även en lågspänd ljusbåge (70 V) i vacuum använts som ljuskälla. Denna ger endast linjer härrörande från de lägsta jonisationstillstånden.

Spektrografen var en vacuumgitterspektrograf av prof. Siegbahns konstruktion. Då intet känt fast ämne genomsläpper strålning inom detta våglängdsområde, åtminstone ej under 1200 Å, och även gaser här ha en mycket stark absorbtionsförmåga, måste hela strålgången från ljuskällan till den fotografiska plåten förlöpa i vacuum. Hela anordningen med gnista, spalt, gitter och plåt var därför innesluten i en tub av stål, ur vilket luften utpumpades med två molekularpumpar.

För strålningens upplösning användes ett konkavgitter av spegelmetall, mot vilket ljuset från den mycket smala spalten (0,002—0,01 mm) inföll under stor infallsvinkel (83 °), och den fotografiska plåten placerades så, att den noggrant låg utefter den s. k. Rowlandcirkeln, vars radie är lika med halva gitterradien. Densamma tangerar gittret och går genom spalten. Strålgången framgår av bifogade fig., där L är ljuskällan, S spalten, G gittret, H plåtläget,

x_0 den mot gittret direkt reflekterade bilden av spalten och x_1 spektrallinjen för en viss vaglängd. Denna uppställning erbjuder stora fördelar vid ifrågavarande korta våglängder med hänsyn till linjernas intensitet, dispersion och avbildningsskärpa. Som exempel kan nämnas, att författaren har kunnat separera linjerna 916,639 Å och 916,680 Å, varvid avståndet på plåten uppgick till 0,014 mm. Någon noggrann absolut bestämning av våglängderna kan emellertid ej erhållas, då de i formeln för dispersionen ingående apparatkonstanterna ej kunna bestämmas tillräckligt noggrant. Beräkningen måste därför ske genom jämförelse med kända linjer t. ex. Al, C eller O, förut mätta i högre ordningar genom jämförelse med järnspektrum.

De fotografiska plåtarna fordra särskild hänsyn. Vanliga plåtar kunna ej användas på grund av sin okänslighet inom ifrågavarande våglängdsområde. Detta anses bero på den starka absorptionen i gelatinet. För den skull användes plåtar framställda enligt Schumanns förfarande, s. k. Schumannplåtar, vilkas ljuskänsliga skikt består av en ytterst gelatinfattig silverbromidemulsion. För exponering av en plåt användes i allmänhet omkring 1000 gnistor.

Vid observationsmaterialets bearbetning, som endast omfattat vismutspektrum, ha de viktigaste linjerna för Bi IV, Bi V och Bi VI identifierats genom jämförelse med spektra från atomer med samma elektronkonfiguration.

Spektrografens stora upplösningsförmåga har även möjliggjort mätningar av hyperfinstruktur. Detta har sitt intresse, då dylik hyperfinstruktur förut ej mätts för så högt joniserade atomer. Den vanliga finstrukturen härrör ju enligt teorien från det magnetiska moment en elektron har på grund av rotationen kring sin egen axel. Den kända dubbletten vid 5890 Å i natriums bågspektrum med våglängdsdifferensen 6 Å, svarande mot vågtalsdifferensen 17 cm^{-1}, skulle då uppkomma på följande sätt. Vid incitering av en natriumatom, t. ex. genom upphettning flyttas en elektron från sitt vilotillstånd ut till en annan bana svarande mot en högre energinivå. Då elektronen sedan faller tillbaka till sitt ursprungliga läge, utsändes energiöverskottet i form av strålning. Ehuru elektronen befinner sig i samma bana, svarar det inciterade tillståndet mot två olika energinivåer, beroende på att i vissa atomer elektronens magnetiska moment sammanfaller till sin riktning med det kraftfält, som alstras genom dess rotation i sin bana men i andra är riktat åt motsatt håll. Elektronsprången från dessa båda tillstånd svara därför mot något olika våglängd, varigenom uppkomsten av två komponenter förklaras. Denna differens växer,

då atomens massa och laddning växer, så att den t. ex. i den analoga dubbletten i spektrum för Bi V uppgår till 275 Å, svarande mot 27 920 cm^{-1}.

Hyperfinstrukturen uppstår på fullkomligt liknande sätt, ehuru det här är atomkärnan, som har ett magnetiskt moment med viss riktning. Olika orientering av detta kan åt i övrigt lika atomer ge olika energi. Detta fenomen uppträder i mycket olika grad hos olika element och är särskilt framträdande för vismut. Hyperfinstruktur är förut mätt för Bi I, Bi II och Bi III. Författaren har uppmätt vissa linjers upplösning för Bi IV och Bi V och konstaterat förekomsten av dylik för Bi VI. De med ovannämnda natriumdubblett analoga linjerna för Bi V bestå sålunda var och en av en dubblett med våglängdsdifferenser på resp. 0,178 och 0,096 Å, vilket svarar mot vågtalsdifferenser på resp. 13,7 och 13,2 cm^{-1}.

Åke Wallenquist, *An attempt to determine photovisual magnitudes without a colour-filter and a study of the colours and the magnitudes of the stars in the galactic cluster Messier 7 and its surroundings*, Bandoeng (Java), 1931. Annalen v. d. Bosscha-Sterrenwacht, Lembang, Java, Vol. III. 4e Gedeelte. Disp. i Uppsala 21 nov. 1931. Opponenter: docent Carl Schalén och fil. dr. Sigfrid Jungkvist.

Bestämningen av stjärnornas färger är en synnerligen viktig uppgift inom den moderna astrofysiken. Som ett mått på stjärnfärgen betjänar man sig i allmänhet av det s. k. färgindexet, varmed förstås skillnaden mellan en stjärnas magnitud inom tvenne olika spektralområden, räknad kortare minus längre våglängd. Det i praktiken mest använda färgindexet är differensen mellan en stjärnas fotografiska storlek och dess fotovisuella storlek, vilken senare erhålles genom att fotografera stjärnan på en färgkänslig plåt genom ett lämpligt gulfilter. Färgindexet är omkring ± 0 för de vita stjärnorna, $+1$ för de gula och omkring $+2$ för de röda stjärnorna.

En metod att bestämma färgindices *utan* färgfilter har 1916 upptäckts av ryssen Tikhoff och senare oberoende av honom av svensken Tamm. Tamm betjänade sig av en refraktor, vars objektiv var korrigerat för fotografiska strålar. Objektivets centrala partier täcktes av en cirkelrund bländare och en färgkänslig plåt exponerades extrafokalt, d. v. s. i gult fokus. Bilden av en stjärna på plåten består då av en punktformig kärna, uppbyggd av gult ljus, vilken omgives av en ring, sammansatt av blått ljus.

Förhållandet mellan intensiteten hos ringbilden och kärnan gav ett mått på stjärnfärgen.

Denna metod visade sig emellertid i praktiken vara tämligen komplicerad och influerad av fotografiska effekter.

Författaren har därför i den föreliggande avhandlingen modifierat metoden så, att ringbilderna lämnats utan avseende och de stjärnlika centralbilderna fått ligga till grund för en bestämning av fotovisuella magnituder. Uppgiften blev därför närmast att jämföra de på så sätt bestämda fotovisuella magnituderna med de på vanligt sätt, med tillhjälp av gulfilter, bestämda.

Ett område av södra Vintergatan, vars centrum sammanföll med den öppna stjärnhopen Messier 7 utvaldes som studieobjekt. Med tillhjälp av Bosscha-Observatoriets Zeiss-astrograf och Astro-Tessar-kamera togs en serie plåtar av sagda himmelstrakt, dels på vanligt sätt genom gulfilter och dels med tillhjälp av centralbländare. De olika slagen av fotovisuella magnituder och färgindices studerades sedan komparativt. Resultatet utvisade, att dessa tvenne slag av fotovisuella magnituder voro fullt likvärda och att centralbländaremetoden, kombinerad med vanliga fotografiska magnitudbestämningar, gav statistiskt användbara färgindices.

De på ovan omtalat sätt härledda fotovisuella magnituderna och färgerna för 674 stjärnor, belägna i vintergatsområdet, behandlades sedan statistiskt från olika synpunkter. Bland annat kunde avståndet till stjärnhopen Messier 7 bestämmas ur en diskussion av frekvenskurvan för hopens vita stjärnor. Avståndet befanns vara 212 parsecs, vilket är i god överensstämmelse med det av förf. i ett föregående arbete härledda.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska Kemistsamfundet. Årligen 12 häften.

Ur innehållet i årg. XLIII, 1931. N:r 10 (okt.): E. Widmark, Om bestämning av små alkoholmängder. — N:r 11 (nov.): O. Collenberg, Om rhenium, dess upptäckt och egenskaper. — N:r 12 (dec.): L. Ramberg, En »eterexplosion». — Årg. XLIV, 1932. N:r 1 (jan.): S. Odén, Sedimentationsanalysen och dess tillämpning på kemiska, agrikulturkemiska och tekniska problem. — N:r 2 (febr.): S. Odén, forts. av nyssnämnda uppsats. — I alla numren referater och översikter, därjämte Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. 12, 1931, dubbelh. 3—4.

Ur innehållet: K. Lundmark, Tycho Brahe-minnena på Hven. — C. V. L. Charlier, Månens bana kring solen. — N. V. E. Nordenmark, Var låg Sveriges första observatorium? — K. G. Malmquist, Stockholms observatorium i Saltsjöbaden. — K. Lundmark, Planeten Pluto.

Industritidningen Norden. Årg. 1931, h. 37—52; 1932, h. 1—10.

Ur innehållet. Starkströmselektriska radiostörningar. — »Atmospannan», en ånggenerator för höga tryck. — Den elektriska glödlampan. — Telefonljuddämpare. — Förkromning. — Teknisk utbildning i Ryssland. — Sveriges textilindustri. — Kulkopplingen. — Elektrisk kylvattenstermometer. — Radiomaster av trä. — Ett svavelverk i öknen Kara-Kum. — Den svenska läderindustrien. — Uppfinnarekontoret. — Yrkesutbildning. — »Ultropaken», ny mikroskopbelysning. — Beskrivningar av nya uppfinningar och patent.

Era. Elektricitetens rationella användning. Årg. 1931, h. 9—12; 1932, h. 1 o. 2.

Ur innehållet. Stockholms nya Brunkebergsstation. — Radiostörningar. — Storbritanniens landsplan för energiförsörjning. — Faraday-jubileet i England. — ASEA i utlandet. — Edison. — Provning av nätanslutna mottagare. — Det elektriska ljusets kultivering. — Det elektriska kontrollväsendet. — De ekonomiska problemen vid den svenska statsbaneelektrifieringen. — Den nya sulfatfabriken vid Östrand. — Gasekvivalenten. — Många notiser om ny materiell.

Radioamatören. Årg. 1931, h. 9—12; 1932, h. 1—3.

Ur innehållet. Störningskompensation vid radiomottagare. — Undersökning av nätsurr med Brauns rör. — Den elektroakustiska flygeln. — Rör med variabel förstärkningsfaktor. — Från radioutställningar i London och New York. — Direktkopplade förstärkare. — Hemupptagning av grammofonskivor. — »En decibel», enhet för ljudstyrka. — Järnmotstånd i vätgas. — Heaviside-skiktet, nyare mätningar. — Elektrolytiska kondensatorer. — Beskrivning av nya apparattyper.

The L. M. Ericsson Review. Tidskrift för Ericsson-Koncernen. Årg. 1931, h. 1—12.

Ur innehållet. Uppsatser om »bakelit». — Elektronrör för frekvensmultiplicering. — Allmän teori för störningsverkan i svagströmsledningar från kraftledningar. — Stockholms interurbanstation. — Om apparater för långdistanstelefoni. — Svenska systemet

för tonsignalering. — Michael Faraday, Ett hundraårsminne. — Ericsson-Koncernens Standard-tvåtrådsförstärkare. — Thomas Edison. — Telefonens frammarsch genom 50 år. — Om åskan, överspänningar och elektricitetens inverkan på människokroppen. — Moderna högspänningskablar.

Matematisk Tidsskrift. København 1931, h. 3—4.

Ur innehållet i avd. A. S. A. Christensen, Ekshaustion-Integration, Euklid-Archimedes. — Fr. Fabricius-Bjerre: Elementærgeometri III, Affine Figurer. — Litteraturanmeldelser. — Examensopgaver. — Ur avd. B. H. Bohr, Niels Nielsen. — T. Carleman, Sur la croissance de certaines classes de fonctions analytiques. — M. Dehn, Über einige neue Forschungen in den Grundlagen der Geometrie. — B. Jessen, Bemærkninger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelværdier.

Fysisk Tidsskrift. København 1931, h. 4—6; 1932, h. 1.

Ur innehållet. Kirstine Meyer, Faraday og Ørsted. — C. B. Madsen, Elektronforstærkning. — E. Krüger, Mylekylspektre og Kvanteteori. — K. Meyer, Speciallæsning i Fysik ved Seminarierne. — Danske Eksamensopgaver. — Chr. Jensen, Nogle Skoleforsøg over elektriske Svingninger. — F. Duus, Skoleforsøg med Skraaplanet. — M. Knudsen, Enheder og Nomenklatur i Fysiken.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Oslo 1931, h. 1—4.

Ur innehållet. E. B. Schieldrop, Klassisk og nytt i mekanikken. — Th. Skolem, Über einige besondere Tripelsysteme mit Anwendung auf die Reproduktion gewisser Quadratsummen bei Multiplikation. — J. Schive, Omkring begynnelsesgrunnene i minste kvadraters metode. — V. Brun, Regneregel til dannelse av det n:te primtall. — Bj. Bjerke, Fortplantningshastighet i elastiske medier. — H. Hasse, Gruppentheoretischer Beweis eines Satzes über gewisse Tripelsysteme. — P. Heegaard, Et gløtt inn i oldegyptisk matematikk. — Bokanmeldelser. — Opgaver.

Den høiere Skole. Organ for Filologenes og Realistenes Landsforening. Årg. 1931, h. 1—20. Oslo.

I årg. 1931 ha förekommit följ. artiklar av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll: A. K. Brynildsen, Et skoleforsøg til prøve av formlene for elastisk og uelastisk støt; Apparatur til prøve av Mariottes lov. — O. T. Thorstensen, Grafisk betraktning til aktuelle opgaver i matematikk på de sproglige linjer. — O. Valeur, Artiumsprøver i fysikk. — Ett »Tillegg til Den høiere Skole» (44 sid.) innehåller norska, danska och svenska examensuppgifter givna under 1931.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

484) *Man har två lika stora volymer V av två vätskor med spec. vikt e' och e''. Man tar av den första en viss mängd $v < V$ och slår i den andra. Därpå tar man av denna blandning mängden v och slår i den första vätskan. Denna operation upprepas n gånger. Huru stora äro då de båda vätskornas spec. vikter, om man får antaga, att vätskorna blandas utan kontraktion?* *S. Wigert.*

485) *En sfär går genom ett av hörnen O till en parallellepiped med diagonalen OF. Sfären skär de från O utgående kantlinjerna OA, OB och OC i A_1, B_1 och C_1 resp. samt OF i F_1. Visa, att*

$$OF \cdot OF_1 = OA \cdot OA_1 + OB \cdot OB_1 + OC \cdot OC_1.$$

486) *En given cirkel har sin medelpunkt på axeln till en medelst topp och brännpunkt definierad parabel. Konstruera kurvornas skärningspunkter.* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

487) Om i ett fyrsiffrigt tal, som är en jämn kvadrat, varje siffra ökas med 3, så erhålles ett annat fyrsiffrigt tal, som även är en jämn kvadrat. Vilka äro de båda fyrsiffriga talen?

Svar: 1156 och 4489.

488) I en rätvinklig parallellepiped med kanterna a, b, c lägges ett plan på sådant sätt, att det går genom mittpunkterna av två från ett hörn utgående kantlinjer samt genom parallellepipedens centrum. Beräkna storleken av den snittyta, som uppkommer genom nämnda plans skärning med parallellepipeden.

Svar: $\frac{3}{4}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 487—490 äro insända av Ewe, 491 av E. B., 492—497 av X., 498—502 av C. H., 503—512 av C. E. B.

489) En kon har sin spets i medelpunkten av en sfär. Konens höjd är lika med sfärens radie, och dess basyta är lika med sfärens yta. Hur stor del av sfärens volym ligger utanför konen?

Svar: $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$.

490) Genom en kantlinje ($=a$) i en oktaeder lägges ett plan vinkelrätt mot en av de motstående sidoytorna. Ett annat plan lägges på analogt sätt parallellt med det förra planet. Beräkna volymen av den del av oktaedern, som ligger mellan de parallella planen.

Svar: $\frac{7a^3\sqrt{2}}{27}$.

491) I en regelbunden oktaeder inskrives en rät, stympad kon, vars axel faller längs en av oktaederns diagonaler, och vars basytor ha ett konstant förhållande. Beräkna den höjd konen skall ha, för att dess volym skall bli så stor som möjligt.

Svar: Höjden bör vara $\frac{1}{3}$ av oktaederns diagonal, vilken storlek det konstanta förhållandet än må ha. Uppgiften kan tydligen generaliseras; oktaedern kan utbytas mot en dubbelpyramid, bildad av två lika, räta pyramider, vilkas gemensamma basyta är en regelbunden månghörning.

492) Lös ekvationen

$$\cos 6x = \cos^6 x.$$

Svar: $x_1 = n \,.\, 180°$; $x_2 = \pm 75°{,}00 + n \,.\, 180°$; $x_3 = \pm 46°{,}07 + n \,.\, 180°$.

493) Lös ekvationen

$$\sin 3x = 4 \sin x \,.\, \sin 2x \,.\, \sin 4x.$$

Svar: $x_1 = n \,.\, 180°$; $x_2 = \pm 20° + n \,.\, 60°$.

494) En cirkel tangerar de lika långa sidorna i en likbent triangel i deras mittpunkter. Beräkna toppvinkeln, om $\frac{1}{3}$ av cirkelns omkrets ligger utanför triangeln.

Svar: $72°{,}76$.

495) Kordorna AB och AC i en cirkel bilda en vinkel, vars cosinus är $\frac{1}{3}$. Deras sammanlagda längd är 6 cm. Beräkna längden av den korda AD, som delar vinkeln BAC mitt itu.

Svar: $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm.

496) Uppdela $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ i faktorer och angiv — i form av relationer mellan vinklarna α, β och γ — villkoren för uttryckets försvinnande.

Svar: $\alpha \pm \beta \pm \gamma = n \cdot 360°$.

497) Det finnes (4) oändliga geometriska serier, i vilka de tre första termerna äro $tg\,x$, $tg\,2x$, $tg\,3x$ i nu nämnd ordning. Beräkna kvoten och första termen i varje sådan serie.

Svar: Kvoterna äro $\pm(\sqrt{2} \pm 1)$; första termen i varje serie är inverterade värdet av resp. kvot.

498) Lös ekvationen

$$x^{\log x} = 10^{(10^{\log x})} \cdot 10^{1-x}.$$

Svar: $x_1 = 10$; $x_2 = 0{,}1$.

499) I en rätvinklig triangel (hypotenusan $= a$) är omkretsen lika många meter som ytan är kvadratmeter. Visa, att kateternas summa $= 4 + a$ meter.

500) I en rätvinklig triangel är $p = 6r$. Bestäm förhållandet mellan sidorna.

Svar: 3 : 4 : 5.

501) Ekvationen $x^2 - px + p - 1 = 0$ är given. Mätetalen till en triangels sidor äro $r_1^2 + r_2^2$; $r_1^2 - r_2^2$ och $2r_1r_2$, där r_1 och r_2 äro rötterna. Bestäm triangelns största vinkel.

Svar: 90°.

502) En cirkel är omskriven kring en rätvinklig triangel. Om den räta vinkelns spets förenas med mittpunkterna av hypotenusans halvcirkelbågar, så är förhållandet mellan dessa förbindningslinjer $= (b + c) : (b - c)$, där b och c äro kateterna.

503) I triangeln ABC förlänger man AB till punkten F så, att $BF = BC$ och BA till punkten D så, att $AD = AC$. Trianglarna DFC och ABC befinnas vara likformiga. Beräkna förhållandet mellan trianglarnas ytor.

Svar: 5,049.

504) Skillnaden mellan två vinklar i en triangel är 90°, och den mellanliggande sidan är $\frac{1}{6}$ av triangelns omkrets. Beräkna triangelns vinklar och sidornas förhållande.

Svar: 16°,28; 36°,86; 126°,86. Sidorna förhålla sig som 7 : 15 : 20.

505) Givet: en punkt P, en vinkel α, två parallella linjer L och M och en kvadrat. Att genom P draga två räta linjer, som med varandra bilda vinkeln α, och vilka skära L och M så, att ett parallelltrapets uppkommer, vars yta är lika med kvadratens.

506) Från den ena brännpunkten i en ellips drages en normal mot en diameter. Sök orten för skärningspunkten mellan dennas konjugatdiameter och nyssnämnda normal.

Svar: Resp. styrlinjer.

507) F och F_1 äro brännpunkterna till en ellips med excentriciteten e, P en punkt på ellipsen på avståndet h från storaxeln; r är radien till den i triangeln FPF_1 inskrivna cirkeln. Bevisa $r = \frac{he}{1+e}$.

508) ABC är en liksidig triangel med 12 cm sida och E en punkt på BC. Beräkna längden av AE, då man vet, att den del av denna sträcka, som utgör korda i den i ABC inskrivna cirkeln är 5 cm.

Svar: $11\frac{1}{13}$ cm.

509) I en likbent triangel ABC ($AB = AC$) tangerar en och samma cirkel basen BC i punkten C och sidan AB i dess mittpunkt. Beräkna cirkelns radie, om $BC = a$.

Svar: $a\sqrt{0{,}6}$.

510) En triangel ABC, där $AB = AC$, är omskriven kring en kvadrat så, att två av kvadratens hörn falla på sidan AC och de båda andra hörnen på var sin av sidorna AB och BC. Beräkna vinkeln A, då man vet, att triangelns yta är tre gånger kvadratens.

Svar: 15°,55.

511) En rektangulär tunn skiva $ABCD$, där $AB = a$ och $BC = b$, vikes längs diagonalen BD så, att de båda planen ABD och CDB bilda rät vinkel med varandra. a) Huru stort är nu avståndet mellan hörnpunkterna A och C? b) Den böjda skivan ställes så, att kanterna AB och BC vila på ett horisontellt bord. Huru högt över bordet befinner sig hörnpunkten D?

Svar: *a)* $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$ *b)* $ab\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^4+b^4+a^2b^2}}$.

512) I en triangel äro två höjder lika stora. På vardera av dessa som diameter har man uppritat en cirkel. De så erhållna cirklarna befinnas tangera varandra. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: 38°,17; 38°,17; 103°,66.

Lösningar till uppg. 448—450.

448) *Genom punkten (a; 0), som ligger inom cirkeln $x^2 + y^2 = 1$, dragas två vinkelräta kordor, vilka dela cirkelns periferi i fyra delar. Visa, att produkten av två närliggande bågars sinus har värdet $1 - a^2$.* X.

Genom punkten $P(a; 0)$ dragas de vinkelräta kordorna AB och CD. Sätt $\angle BAC = \angle BDC = \varphi$ och $\angle BAD = \angle BCD = \psi$. Medelpunktsvinklarna för bågarna BC och BD äro då resp. 2φ och 2ψ. Enligt formeln $R = \frac{a}{2 \sin A}$ fås $BC = 2 \sin \varphi$; $BD = 2 \sin \psi$. Alltså är $PC = 2 \sin \varphi \cos \psi$; $PD = 2 \sin \psi \cdot \cos \varphi$. Enligt kordasatsen är $PC \cdot PD = (1 + a)(1 - a)$; man får alltså $\sin 2\varphi \cdot \sin 2\psi = 1 - a^2$.

B-r. Även löst av *B. Lindwall.*

449) *Man betraktar de trianglar ABC med given yta, som ha en diameter AB i cirkeln K till gemensam bas. Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna till K i dess variabla skärningspunkter med CA och CB.* X.

Låt B_1 och C_1 vara skärningspunkterna mellan K och AC resp. BC. Om tangenten i B_1 skär tangenten i A i Q och höjden från C mot AB i P, så är $AQ = B_1Q$ och således även $B_1P = CP$. Alltså ligger P på radikalaxeln till K och punktcirkeln C. Genom P måste då även tangenten i C_1 gå. Tages nu den räta linje, som punkten C genomlöper, till y-axel och cirkelns ekv. antages vara $x^2 + y^2 + ax + b = 0$, så blir ekv. för den sökta orten $x^2 = x^2 + y^2 + ax + b$, d. v. s. en parabel, som tangerar K i dess eventuella skärningspunkter med y-axeln.

X. Även löst av *B—r.*

450) *A är en godtycklig punkt på en given parabel. Normalen i A skär kurvan ytterligare i B och dess styrlinje i C. Tangenterna i A och B råkas i P. Bevisa, att $PB \perp PC$.* X.

För varje korda AB i ett kägelsnitt gäller, att dess pol P och mittpunkt M ligga på samma (till AB hörande) diameter. I parabelfallet råkar denna diameter kurvan endast i en ändlig punkt Q, som ligger mitt emellan P och M, så att tangenten i Q (som är $\parallel AB$) delar PA mitt itu i R. I föreliggande fall gäller dessutom, att $RQ \perp RA$, varav följer, att R ligger på styrlinjen. Detta åter innebär, att R är höjdernas skärningspunkt i $\Delta\, CPM$. Då slutligen den tredje höjden $MR \parallel PB$, är satsen bevisad.

X. Även löst av *B. Lindwall* och *E. S—n.*

Sannolikhetsräkning på empirisk grundval.

Av EDVARD GÖRANSSON.

7. Tillägg. (Forts.)

Lektor Petrinis förslag till kurs i sannolikhetsräkning. Såvitt jag vet, föreligger endast ett förslag till kurs i sannolikhetsräkning. Detta härrör från lektor PETRINI (se denna tidskrift 1931: 2, sid. 77). Enligt PETRINI kunna lärjungarna redan i klasserna 2—4 av den femåriga, d. v. s. klasserna 1—3 av den fyraåriga, realskolan övas i lättare kombinationsproblem, och vid diskussion av dessa kan läraren lämpligen omnämna någon omedelbar tillämpning på sannolikhetsberäkning. Särskilt betonas vikten av att »*förväntningen* och dess korrelat *risken*» göras till föremål för behandling. Detta bör ske senast i realskolans högsta klass, varjämte åt eleverna böra ges några vinkar om »hur de böra använda dessa begrepp i det dagliga livet». Den allmänna bristen på medveten uppfattning av dessa begrepp har för mången varit orsaken till förlust av en chans i livet. »Redan i det fyraåriga gymnasiets första ring» (resp. realskolans högsta klass) »kan man lära eleverna, huru de skola bestämma π med två decimaler genom att släppa ned en knappnål på ett streckat papper, ett experiment, som lämpligen utföres i hemmet och diskuteras i skolan».

I den gymnasiering, där enligt 1928 års kursplan enkla exempel på sannolikhetsräkning skola ingå i kursen, nämligen högsta ringen av latingymnasiet och näst högsta ringen av realgymnasiet, bör klassen i dess helhet repetera kombinationsläran och sannolikhetskalkylens element, varefter

»man kommer in på själva kärnan i sannolikhetskalkylen, nämligen en mer matematiskt preciserad form av de stora talens lag». Vidare bör på reallinjen tillfälle beredas särskilt intresserade lärjungar att hålla föredrag »med en mera analytisk behandling av de stora talens lag».

Till den obligatoriska kursen böra för intresserade lärjungar fogas å latinlinjen: »föredrag över felteorier, statistik, livränteberäkningar o. d.» samt å reallinjen: »biologiska och andra statistiska tillämpningar, lagarna om sannolika fel, korrelation, minsta kvadratmetoden, teorien för sanndrömmar, när man tar hänsyn till de fall, som inte slå in, geometrisk sannolikhet, spel och lotterier, speciella intressanta sannolikhetsproblem m. m.»

Kritik av lektor Petrinis förslag. Med hänsyn till att flertalet lärare icke äro förtrogna med sannolikhetsräkningen, torde definition på *förväntning* och *risk* vara behövlig, så mycket mer som olika författare använda skiftande benämningar på samma sak. Med *förväntning* avses i detta sammanhang förmodligen det, som stundom något romantiskt benämnes »matematisk förhoppning», ej att förväxla med »moralisk förhoppning». Om i ett hasardspel, som tänkes pågå hur länge som helst, av 100 spel i medeltal 20 utfalla med en vinst av 10 kronor, 30 med 20 kronor och 50 med ingen vinst, kan en spelare, förutsatt att han håller på tillräckligt länge, påräkna en vinst i genomsnitt av $0.20 \times 10 + 0.30 \times \times 20 = 8$ kronor. Med den betydelse man i allmänhet ger åt begreppet matematisk förväntning, är denna i detta fall 8 kronor. Till förebyggande av missförstånd har jag i den föregående framställningen undvikit ifrågavarande benämning. I det följande skall jag angiva, huru man med förväntning ofta menar det s. k. bernoulliska medelvärdet. Professor Cramér framhåller,[1] att faran med sådana lättfattliga begrepp som exempelvis »matematisk förväntning»

[1] Anförda arbete, Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar, sid. 61.

är, att man lätt glömmer deras exakta definition och tillägger dem en långt mera positiv betydelse, än de på grund av definitionen ha. Med anledning av lektor PETRINIS framställning har begreppet matematisk *risk* belysts i kapitlet om livförsäkring (1931: 4, sid. 207 ff.). Att bristen på medveten uppfattning om begreppen förväntning och risk skulle för mången föranlett förlusten av en chans i livet förefaller föga troligt.

Till nålproblemet skall jag återkomma i annat sammanhang. Innan jag övergår till lektor Petrinis ställning till de stora talens lag, nödgas jag anföra ett par satser ur sannolikhetsräkningen, alldenstund jag förutsätter, att en del av denna tidskrifts läsare endast besitta de insikter i ämnet, som hämtats från förut omnämnda arbeten, vilka utgivits med anledning av 1928 års kursplan.

Antag, att man har n iakttagelser, fördelade i t grupper med

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots\ n_t$$

i varje grupp. Inom varje grupp äro de iakttagna värdena

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_t$$

respektive. Då är medelvärdet

$$m = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_t x_t}{n} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \ldots + x_t \frac{n_t}{n}.$$

Om n antager allt större värden, definieras (jfr Poissons postulat om existensen av gränsvärden) sannolikheten $w(x_\nu)$ för att värdet x_ν skall förekomma, genom likheten

$$w(x_\nu) = \frac{n_\nu}{n} \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots\ t).$$

Efter som $n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$, är alltså

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{t} w(x_\nu) = 1$$

och medelvärdet

$$m = \sum_{\nu=1}^{t} x_\nu \,.\, w(x_\nu). \tag{2}$$

Analogt finner man, att spridningen kring mediet (dispersionen) angives av

$$\sigma^2 = \sum_{\nu=1}^{t} (x_\nu - m)^2 \,.\, w(x_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{t} x_\nu^2 \,.\, w(x_\nu) - 2m \sum_{\nu=1}^{t} x_\nu \,.\, w(x_\nu) + m^2 \sum_{\nu=1}^{t} w(x_\nu),$$

varav med tillämpning av formlerna (1) och (2) erhålles

$$\sigma^2 = \sum_{\nu=1}^{t} x_\nu^2 \,.\, w(x_\nu) - m^2. \tag{3}$$

Vad de stora talens lag angår, synes, att döma av hänvisningen till lektor Hjalmar Olsons arbete, Petrinis mening vara, att man till en början skall lösa följande uppgift. Om q är sannolikheten för att ett av två alternativ skall inträffa, hur stor är sannolikheten $w_n(x)$ för att vid n försök alternativet i fråga skall inträffa x gånger och alltså icke inträffa $n - x$ gånger? Sannolikheten för det sista alternativet är $1 - q = p$. Svaret på denna fråga lämnar som bekant (se anförda arbeten exempelvis av Hj. Olson och Sven Ohlon) den s. k. newtonska formeln

$$w_n(x) = \binom{n}{x} q^x p^{n-x}. \tag{4}$$

Emellertid har sannolikheten $w_n(x)$, såsom också antydes i Olsons framställning, icke så stort intresse som sannolikheten $W_n(m - \varepsilon, m + \varepsilon)$ för att vid n försök x skall ligga mellan gränserna $m - \varepsilon$ och $m + \varepsilon$. Enligt additionssatsen är sistnämnda sannolikhet

$$W_n(m - \varepsilon,\ m + \varepsilon) = \sum_{x=m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} w_n(x). \tag{5}$$

Om det också icke är förenat med några svårigheter för lärjungen att härleda formlerna (4) och (5), fordras dock för deras praktiska tillämpning större matematiska insikter, än skolmatematiken kan meddela. Ett par exempel må belysa detta, men först böra med några ord omnämnas bernoulliska medelvärdet (förväntningen) och spridningen. Man igenkänner från algebran, att uttrycken, som framgå av (4), äro termer i utvecklingen av n:te digniteten av $p + q$. Av likheten

$$(6) \qquad \begin{aligned}(p+q)^n &= p^n + \binom{n}{1} p^{n-1}q + \binom{n}{2} p^{n-2}q^2 + \ldots + q^n = \\ &= w_n(0) + w_n(1) + w_n(2) + \ldots + w_n(n)\end{aligned}$$

inses genast, att eftersom $p + q = 1$, är summan av de $w_n(x)$, som framgå av (4), lika med 1. LAPLACE har framställt sambandet mellan sannolikheten $w_n(x)$ och binomialsatsen även på annat sätt. Om man utvecklar $(p + qz)^n$ efter digniteter av z, så blir koefficienten till z^x lika med $w_n(x)$. Man erhåller alltså

$$(7) \qquad \begin{aligned}(p+qz)^n &= p^n + \binom{n}{1} p^{n-1}q \,.\, z + \binom{n}{2} p^{n-2}q^2 \,.\, z^2 + \ldots q^n \,.\, z^n = \\ &= w_n(0) + w_n(1) \,.\, z + w_n(2) \,.\, z^2 + \ldots + w_n(n) \,.\, z^n = \\ &= \sum_{x=0}^{n} w_n(x) \,.\, z^x.\end{aligned}$$

Om man differentierar båda leden i (7) med avseende på z, erhålles

$$(8) \qquad n(p+qz)^{n-1}q = \sum_{x=0}^{n} w_n(x) \,.\, xz^{x-1}.$$

Sättes $z = 1$ och iakttages att $p + q = 1$, blir enligt (2) medelvärdet (förväntningen)

$$(9) \qquad m = nq.$$

Differentieras (8) ännu en gång med avseende på z, erhålles

$$n(n-1)(p+qz)^{n-2}q^2 = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)w_n(x)z^{x-2}.$$

Sättes $z = 1$ och iakttages att $p + q = 1$, erhålles

$$n(n-1)q^2 = \sum_{x=0}^{n} w_n(x) \cdot x^2 - \sum_{x=0}^{n} w_n(x) \cdot x,$$

$$(nq)^2 - nq^2 = \sum_{x=0}^{n} w_n(x) \cdot x^2 - nq$$

och med tillämpning av formeln (3)

$$(nq)^2 + nq(1-q) = \sigma^2 + m^2,$$

eller då $nq = m$ och $1 - q = p$,

$$\sigma^2 = npq. \tag{10}$$

nq kallas bernoulliska medelvärdet (förväntningen) och $\sqrt{npq}$ den bernoulliska spridningen.[1]

Vi vilja nu tillämpa formlerna (4) och (5) på ett par exempel. Antag att man kastar en »riktig» tärning 1200 gånger. Sannolikheten för att en sexa skall komma upp vid ett kast är $q = \frac{1}{6}$. Bernoulliska medelvärdet (förväntningen) vid 1200 kast

$$m = nq = 1200 \cdot \frac{1}{6} = 200.$$

Dispersionen erhålles av

$$\sigma^2 = npq = 1200 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{0.006}}.$$

Sannolikheten för att vid 1200 kast sexan skall komma upp exempelvis 180 gånger är alltså enligt (4)

$$w_{1200}(180) = \binom{1200}{180}\left(\frac{5}{6}\right)^{1020}\left(\frac{1}{6}\right)^{180}.$$

[1] C. V. L. Charlier, Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik, Lund, Gleerup, 1931, sid. 26.

En exakt beräkning av detta uttryck, som för lärjungen i avsaknad av svåråtkomliga tabellverk är outförbar, ger till resultat

$$w_{1200}(180) = 0.009387.$$

På skolstadiet erbjuder det allför stora svårigheter att deducera den formel, som erfordras för en approximativ beräkning. Man torde därför bli nödsakad att hoppa över den teoretiska härledningen av den normala sannolikhetsfunktionen och antaga den vara funnen på empirisk väg exempelvis i överensstämmelse med framställningen i junihäftet 1930. Där förutsättes, att klockkurvan erhållits genom studiet av observationsfel och att ett analytiskt uttryck för kurvan ävenledes erhållits på empirisk väg. För en approximativ beräkning av w har man att i formeln för den normala sannolikhetsfunktionen (se 1931: 1, sid. 19)

$$y = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) \tag{11}$$

sätta $x = 180$ och de ovan angivna värdena på m och σ. Med användning av tabellen över φ-funktionen (1931: 2, sid. 73) erhålles

$$w_{1200}(180) = \sqrt{0.006}\,.\,\varphi(-1.549) = \sqrt{0.006} \times 0.1204 = 0.009326,$$

vilket värde med endast 0.7 % understiger det exakta. Följande omständighet torde böra observeras. Det y-värde, som erhålles ur formeln (11), är sannolikhetsintensiteten, eftersom man vid härledning av formeln antagit förloppet vara kontinuerligt, d. v. s. att man rör sig med geometriska sannolikheter, under det att w-värdena beteckna aritmetiska, d. v. s. diskontinuerliga, sannolikheter. Som man sett, är skillnaden utan praktisk betydelse.

Sannolikheten för att sexan vid 1200 kast skall komma upp 200 gånger, alltså i överensstämmelse med förväntningen, är

$$w_{1200}(200) = \binom{1200}{200}\left(\frac{5}{6}\right)^{1000}\left(\frac{1}{6}\right)^{200}.$$

w-värdet beräknas approximativt med tillhjälp av den normala sannolikhetsfunktionen (11). Alltså

$$w_{1200}(200) = \frac{\varphi(0)}{\sigma} = 0.3989\sqrt{0.006} = 0.03090.$$

Av större intresse är emellertid, såsom ovan anförts, beräkning av sannolikheten för att värdena skola ligga mellan två angivna gränser. Låt oss därför undersöka sannolikheten för att vid 1200 kast antalet sexor icke skall avvika från medelvärdet (förväntningen) med mera än 20. Enligt (5) är

$$W_{1200}(180,\ 220) = \sum_{x=180}^{220} w_n(x).$$

Om man endast hade Newtons formel att tillgå, skulle man alltså behöva beräkna 41 värden $w_n(x)$ och addera dem. Av de anförda exemplen framgår, att detta är praktiskt sett så gott som outförbart. Med användning av den i det föregående (1931: 1, sid. 20) definierade normala fördelningsfunktionen $\Phi(x)$ är en approximativ beräkning lätt att utföra.

Enligt en formel i denna tidskrift 1931: 1, sid. 21 är sannolikheten för att avvikelser från m ligga mellan $m - \varepsilon$ och $m + \varepsilon$ lika med

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

I föreliggande exempel är $\varepsilon = 20$ och σ har förut beräknats. Alltså är

$$\frac{\varepsilon}{\sigma} = 20\sqrt{0.006} = 1.549.$$

Med tillhjälp av tabellen över Φ-funktionen (1931: 4, sid. 212) erhålles

$$W_{1200}(180,\ 220) = 2\Phi(1.549) - 1 = 2 \times 0.9391 - 1 = 0.8782,$$

vilket innebär, att man kan räkna med att sannolikheten är 88 % för att vid 1200 tärningskast sexor skola komma upp mellan 180 och 220 gånger.

Som ett annat exempel må anföras följande. Under femårsperioden 1924—1928 föddes i Sverige 513 216 levande barn, av vilka 263 548 eller 0.5135 voro gossar och 249 668 eller 0.4865 voro flickor. År 1930 föddes 94 200 barn. Fördelningen i gossar och flickor var obekant, då Statistisk årsbok för Sverige för 1931 utgavs. Bernoulliska medeltalet (förväntningen) beträffande antalet år 1930 födda gossar är

$$nq = 94\,200 \times 0.5135 = 48\,372.$$

Om man frågar efter sannolikheten för att antalet födda gossar avviker från detta tal med högst 500, har man att beräkna

$$W_{94\,200}(47\,872,\ 48\,872) =$$
$$= \sum_{x=47\,872}^{48\,872} \binom{94\,200}{x} \times 0.4865^{94\,200-x} \times 0.5135^{x}.$$

Givetvis är det otänkbart, att någon skulle kunna räkna ut dessa 1001 termer i binomialserien och sedan addera dem. Användes den förut använda approximativa metoden, finner man

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{94\,200 \times 0.5135 \times 0.4865},$$

$$\varepsilon = 500,\ \frac{\varepsilon}{\sigma} = 3.259$$

$$W_{94\,200}(47\,872,\ 48\,872) = 2\Phi(3.259) - 1 =$$
$$= 2 \times 0.9994 - 1 = 0.9988.$$

Av 94 200 under år 1930 födda barn kommer alltså med en till visshet gränsande sannolikhet (99.9 %) antalet gossar att ligga mellan 47 872 och 48 872, d. v. s. avvika från det beräknade medeltalet (förväntningen) med högst 500.

Med det anförda är ådagalagt, att det är praktiskt sett

outförbart att beräkna den massa binomialtermer, som förekomma vid uppgifter rörande de »stora talen». Man nödgas använda approximativa metoder. På skolstadiet är det emellertid omöjligt att utföra de gränsövergångar, genom vilka man kommer fram till gauss'ska fördelningsfunktionen, utan man är nödsakad att vädja till erfarenheten (jfr 13: 4, år 1930, sid. 198 ff.). Vad har man då på detta stadium för praktisk användning av den klassiska sannolikhetskalkylen, när det är fråga om dess tillämpning på statistiken?

Sannolikhetsräkning eller statistik. Enligt lektor PETRINI kan den, som sysslar med *religions-* eller *språk*forskning vid sina spekulationer icke vara i avsaknad av någon träning i sannolikhetsräkning. För så gott som alla övriga vetenskaper fordras enligt PETRINI statistik, vilken »numera så helt bygger på sannolikhetskalkylen, att den bör betraktas som tillämpad matematik». Särskilt nämnas *biologiska* vetenskaper, *filosofi, nationalekonomi, historia* och *juridik.* Vidare framhålles den betydelse sannolikhetskalkylen har för den matematiska *fysiken,* men det antydes icke, att även här, såsom jag tidigare framhållit (1932: 1, sid. 9), är fråga om statistik och ingenting annat. I läroböcker i sannolikhetsräkning förekommer därför ett kapitel kallat fysikalisk statistik. I v. MISES lärobok behandlas grunddragen av detta parti utförligt, sid. 409 till och med 503. I detta sammanhang må omnämnas, att det äldsta och mest bekanta, av lektor PETRINI särskilt understrukna, exemplet på användning av sannolikhetsräkning inom fysiken numera endast har historiskt intresse. Ingen fysiker tror längre på de enkla, klotformiga, fullkomligt elastiska molekyler, som utgjorde grundval för CLAUSIUS'-MAXWELLS-BOLTZMANNS kinetiska gasteori. Men oavsett detta leder tillämpning av statistiska teorien på gasteorien, såsom redan framhölls av ERNST MACH, till olösliga motsägelser.

Enligt professor F. J. LINDERS uttalande i sin installa-

tionsföreläsning vid Uppsala universitet [1] är det icke uteslutet, att begreppet sannolikhet vid en förestående revision av den teoretiska statistikens grundvalar kommer att visa sig obehövligt för statistiken eller åtminstone fråntagas den betydande roll, det hittills spelat.

På grund av det anförda synes det mig, såsom jag redan förut antytt, att »enkla exempel på sannolikhetsräkning» måtte utgå ur gymnasiets undervisningsplan. I stället torde i de metodiska anvisningarna rörande funktionsbegreppet det, som yttras om statistiska kurvor, kunna göras något fylligare, så att man kan få in begreppet relativt frekvenstal (sannolikhet), vidare postulatet om existensen av ett gränsvärde vid ett stort antal observationer samt möjligen något exempel på vad man kallar normal fördelning (GAUSS' klockkurva). Om lärjungen har tillräckliga matematiska förutsättningar, en sak, varom jag saknar kännedom, torde man av kurvans utseende kunna sluta sig till ett analytiskt uttryck för densamma förslagsvis genom det förfaringssätt, som angavs i den första av mina uppsatser (årg. 13 : 4 år 1930). Längre kan man nog icke komma. Säkert är, att icke ens den mest intresserade lärjunge har förutsättningar för att kunna inhämta den av lektor PETRINI föreslagna kursen.

Den klassiska sannolikhetsräkningen lämpar sig icke för skolan. Lektor PETRINI förvånar sig över det motstånd, som försports från läroverkslärare mot sannolikhetsräkningens upptagande å skolprogrammet och jämför det med det motstånd, som i århundradets början från äldre lärare restes mot införandet av elementen av infinitesimalräkningen. Sistnämnda motstånd var förklarligt, då ännu mot slutet av förra århundradet den vetenskapliga framställningen av infinitesimalräkningen började med abstrakta existensbevis o. d. De äldre lärarna kände ej till att lärogången an-

[1] Några aktuella problemställningar inom statistiken, Nordisk statistisk tidskrift 1932, häfte 1.

passats för gymnasiestadiet, tack vare införandet av grafisk framställning och en revision av principerna.[1] Sedan man satt sig in i saken och funnit, att det nya momentets införande icke medförde en utökning av kursen utan en förenkling, i det att man ersatte komplicerade och växlande tillvägagångssätt vid beräkning av tangenter, ytor, volymer, framställning av vissa delar av fysiken, t. ex. hastighet, acceleration, etc. med en enkel och enhetlig metod, var motståndet brutet.

Vad sannolikhetsräkningen angår, ha vi sett, att sedan mitten av förra århundradet försiggått en strävan att revidera principerna, vilken först helt nyligen synes ha lett till resultat. Revisionen har ännu icke hunnit att genomtränga framställningen i läroböckerna. Vidare kommer införandet av sannolikhetsräkningen att medföra en utökning av skolkursen och det nya momentet har intet samband med kursen i övrigt. Slutligen har visats, att man i skolan ej kan komma till rätta med de stora talens lag, då man saknar erforderliga matematiska förutsättningar, och att på grund härav sannolikhetsräkningen på detta stadium icke kan tjäna som ingångsport till statistiken. Kan det under sådana förhållanden väcka förvåning, att man icke är tilltalad av det nya kursmomentet?

En undersökning över de statliga läroverkens kursplaner i matematik under 1800-talet har givit vid handen,[2] att varken kombinatorik eller sannolikhetsräkning däri ingått. Icke heller i de vanliga läroböckerna i algebra har jag påträffat detta kursmoment. Lektor Josef Anderssons uppgift (se denna tidskrift årgång 12 för 1928/1929 sid. 170), att förr i världen våra svenska läroböcker i algebra även innehöllo en del kombinatorik och sannolikhetsräkning, har jag icke funnit bekräftad. Frågan om sannolikhetsräk-

[1] F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien, Leipzig, Teubner 1907.

[2] Se bilaga till Stockholms samgymnasiums årsredogörelse läsåret 1904/1905.

ningens upptagande i kursplanen var under omprövning i slutet av förra och början av detta århundrade men avböjdes av skäl, som anförts i början av den första av dessa uppsatser i junihäftet år 1930. Först år 1928 upptogs detta kursmoment utan föregående utredning, ehuru ännu i dag gäller, vad som tidigare anförts mot detsammas införande i skolorna, nämligen att man icke fått ett riktigt grepp på hur ämnet bör läggas, vilket i själva verket bekräftas av lektor Petrinis i det föregående berörda uppsats. Detta bestyrkes ock av förordet till professor Cramérs i det föregående många gånger citerade lärobok, från vilken jag tillåter mig anföra: »Var och en, som försöker att närmare orientera sig i litteraturen på detta område, måste frapperas av den brist på överensstämmelse, som råder mellan de olika författarnas ställning till ämnets grundläggande principfrågor. Fundamentala begrepp, såsom slumpens eller sannolikhetens begrepp, definieras knappast på samma sätt av två olika författare. Vad som för den ene är ett matematiskt bevisat teorem, är för den andre en erfarenhetssats; vad som förefaller den ene som en av hela teoriens hörnstenar, är för den andre kanske en högst suspekt sats, som på sin höjd gäller under vissa inskränkande förutsättningar och i varje fall måste användas med stor försiktighet. De matematiska sannolikhetsformlernas användbarhet på verkligheten är för den ene något självklart, som ej behöver diskuteras, för den andre något som ej kan accepteras utan ingående analys».

(Forts.)

Den regelbundna 34-hörningen.

Av ALBERT STENVALL.

I denna tidskrift har för kort tid sedan (mars 1931) varit införd en uppsats av AGNE WAHLGREN om den regelbundna 17-hörningen. Då lektor Wahlgrens eleganta förenkling av den Gauss'ska metoden har förebildens analytiska karaktär, torde en mera syntetisk behandling av problemet kanske kunna påräkna läsekretsens intresse. Som av rubriken framgår, föredrager jag att fördubbla sidoantalet.

I en cirkel med O till medelpunkt (fig. 1) dragas två vinkelräta diametrar XX_1 och YY_1. Cirkelns radie må vara $4\,h$. Utefter OX_1 och OY avsättas sträckorna

$$(1) \qquad OA = \frac{h}{4}, \quad OB = h.$$

Punkten A tages till medelpunkt för en cirkel, som går genom B och skär XX_1 i F_1 och F_2. Linjerna BF_1 och BF_2 dragas. På XX_1 placeras punkterna C_1, C_2, C_3 och C_4 så, att man har

$$(2) \qquad F_1C_1 = F_1C_3 = BF_1, \quad F_2C_2 = F_2C_4 = BF_2.$$

På XC_2 och X_1C_4 som diametrar uppritas halvcirklar, som skära YY_1 i resp. K_3 och G_1. På OC_1 som diameter uppritas ävenledes en halvcirkel, i vilken man inpassar kordan

$$(3) \qquad OK_1 = OG_1.$$

Linjerna C_1K_1 och C_3K_3 dragas. I en ny cirkel med samma radie $4h$ (fig. 2) må medelpunkten och de vinkelräta diametrarna betecknas på samma sätt som förut. Utefter OX och OX_1 avsättas sträckorna

$$(4) \qquad \begin{cases} OT_1 = OT_{16} = C_3K_3 + OC_3, & OT_2 = OC_1 + C_1K_1 \\ OT_4 = C_3K_3 - OC_3, & OT_8 = OC_1 - C_1K_1. \end{cases}$$

Genom punkterna T dragas kordor vinkelräta mot XX_1. Kordornas ändpunkter betecknas på sätt, som figuren närmare utvisar. Jag påstår, att punkterna S och V jämte X och X_1 äro hörnpunkter i en regelbunden 34-hörning.

Först några ord om de längdbeteckningar, som användas i beviset. Vi sätta i fig. 1

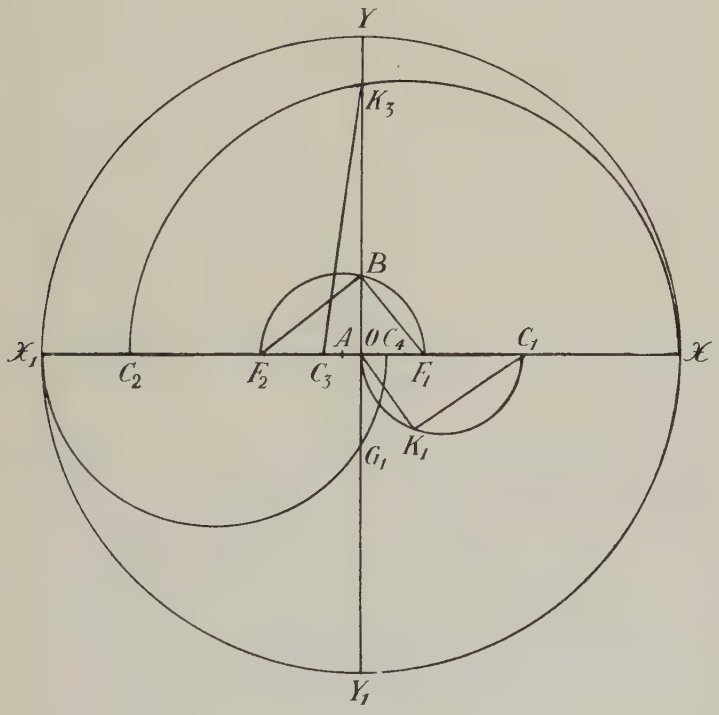


Fig. 1.

(5) $OF_1 = a_1$, $OF_2 = -a_2$

(6) $BF_1 = b_1 = -b_3$, $BF_2 = -b_2 = b_4$

(7) $OC_1 = c_1$, $OC_2 = -c_2$, $OC_3 = -c_3$, $OC_4 = c_4$

(8) $C_1K_1 = k_1 = -k_5$, $C_3K_3 = k_3 = -k_7$

(9) $OK_1 = d_1$, $OK_3 = d_3$

och i fig. 2

(10) $OT_1 = x_1,\ OT_2 = x_2,\ OT_4 = x_4,\ OT_8 = x_8,\ OT_{16} = -x_{16}$

(11) $S_\nu T_\nu = y_\nu \quad (\nu = 1,\ 2,\ 4,\ 8),$

(12) $XS_\nu = s_\nu \quad (\nu = 2,\ 4,\ 8,\ 16).$

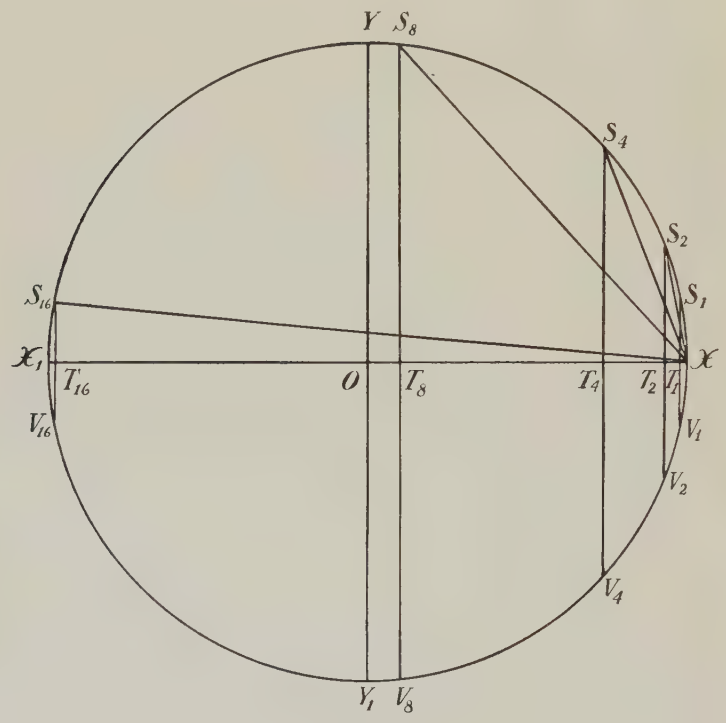


Fig. 2.

Vidare låta vi indices för talen a, b, c och k vara variabla i så måtto, att de kunna ökas i a-värdena med en godtycklig multipel av 2, i b- och c-värdena med en godtycklig multipel av 4 och i k-värdena med en godtycklig multipel av 8. Tack vare denna överenskommelse får man ur likheterna (2) formeln

(13)[1] $$c_n = a_n + b_n$$

och ur (4) formeln

(14) $$x_{2^n} = c_{2n-1} + k_{2n-1} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

I varje rätvinklig triangel är höjden mot hypotenusan medelproportional mellan hypotenusans delar. Triangeln BF_1F_2 ger oss därför

(15) $$a_n\, a_{n+1} = -\,h^2.$$

Vidare är $OF_1 + OA = OF_2 - OA$ och alltså

(16) $$2a_n + 2a_{n+1} + h = 0.$$

Ur (6) följer emellertid

(17) $$b_n + b_{n+2} = 0,$$

varför (13) ger upphov till

$$c_n + c_{n+2} = 2a_n.$$

Kombineras denna likhet med (16), så får man

(18) $$2a_{n+1} = -\,c_n - c_{n+2} - h.$$

På grund av formlerna (17) och (13) är

$$b_n^2 - a_n^2 = (b_n + a_n)(-\,b_{n+2} - a_{n+2}) = -\,c_n\, c_{n+2}.$$

Eftersom trianglarna OF_1B och OBF_2 äro rätvinkliga, har man

$$b_n^2 - a_n^2 = h^2,$$

och alltså är

(19) $$c_n\, c_{n+2} = -\,h^2.$$

[1] I denna formel är n-värdet godtyckligt. Så ock i det följande i alla formler, vari n ingår, för så vitt ej motsatsen uttryckligen tillkännagives.

Ur de nämnda trianglarnas likformighet härflyter proportionen

$$h : b_{n+2} = a_{n+1} : b_{n+3},$$

och således har man likheten

$$b_{n+3}h = a_{n+1}b_{n+2},$$

som på grund av (17) kan skrivas under formen

$$b_{n+3}h = -a_{n+1}b_n.$$

Likheten (13) ger oss därför

$$b_{n+3}h = a_{n+1}(a_n - c_n). \tag{20}$$

Men den ger oss även

$$2c_{n+3}h = 2a_{n+3}h + 2b_{n+3}h = 2a_{n+1}h + 2a_{n+1}(a_n - c_n)$$

tack vare nyssnämnda likhet (20). Man har alltså

$$2c_{n+3}h = 2a_{n+1}(h - c_n) + 2a_n a_{n+1}.$$

Tagas formlerna (18) och (15) till hjälp, så får man

$$2c_{n+3}h = (-c_n - c_{n+2} - h)(h - c_n) - 2h^2,$$

varur följer enligt (19)

$$c_n^2 = 4h^2 + c_{n+2}h + 2c_{n+3}h. \tag{21}$$

Halvcirklarna på X_1C_4 och XC_2 ge oss

$$d_1^2 = 4c_4h, \quad d_3^2 = -4c_2h. \tag{22}$$

Vidare äro trianglarna OC_1K_1 och OC_3K_3 rätvinkliga, och man har således

$$k_1^2 = c_1^2 - d_1^2, \quad k_3^2 = c_3^2 + d_3^2. \tag{23}$$

Dessa likheter (22) och (23) ge oss anledning att införa hjälpkvantiteterna d_2, d_4, k_2, k_4, k_6 och k_8, definierade genom likheterna

(24) $$d_2^2 = 4c_1h, \quad d_4^2 = -4c_3h,$$

(25) $$k_2^2 = c_2^2 - d_2^2, \quad k_4^2 = c_4^2 + d_4^2$$

och

(26) $$k_2 = -k_6, \quad k_4 = -k_8 \quad (k_2 > 0,\ k_4 > 0)^1.$$

Därigenom erhålles formeln

$$k_n^2 = c_n^2 - 4c_{n+3}h,$$

och man har alltså

(27) $$k_n^2 = 4h_1^2 + c_{n+2}h - 2c_{n+3}h$$

tack vare (21). Om (21) och (27) multipliceras med varandra, får man

$$c_n^2 k_n^2 = 16h^4 + 8c_{n+2}h^3 + c^2{}_{n+2}h^2 - 4c^2{}_{n+3}h^2.$$

Vi utbyta talen $c^2{}_{n+2}$ och $c^2{}_{n+3}$ mot deras värden enligt formel (21). Då erhålles

$$c_n^2 k_n^2 = 4h^4 + c_n h^3 - 2c_{n+1}h^3 = h^2 k^2{}_{n+2}.$$

Genom kvadratrotutdragning får man

(28) $$c_n k_n = (-1)^{n-1} h k_{n+2},$$

som gäller för alla n-värden, om indices i de nyinförda k-värdena få ökas med en godtycklig multipel av 8 liksom i de ursprungliga k-värdena. Adderas slutligen (21) och (27), så får man

(29) $$c_n^2 + k_n^2 = 8h^2 + 2c_{n+2}h.$$

Vi äro nu snart framme vid målet och hålla oss i fortsättningen till fig. 2. Tydligen gälla de båda likheterna

[1] Dessa hjälpkvantiteter äro egentligen obehövliga. Vi införa dem huvudsakligen för att få tillfälle att påpeka, att punkterna med abskissorna $c_{2n} + k_{2n}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ äro projektioner på XX_1 av vissa hörnpunkter i 34-hörningen liksom de av oss konstruerade punkterna med abskissorna $c_{2n-1} + k_{2n-1}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$.

(30) $$s^2{}_{2n} = 8h(4h - x_{2n}) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

och

(31) $$y^2{}_{2n-1} = 16h^2 - x^2{}_{2n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

eftersom trianglarna X_1XS_{2n} och $OS_{2n}T_{2n}$ äro rätvinkliga oberoende av n-värdet. På grund av (14) har man alltså

(32) $$s^2{}_{2n} = 8h(4h - c_{2n-1} - k_{2n-1}) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

och

$$y^2{}_{2n-1} = 16h^2 - (c_{2n-3} + k_{2n-3})^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Den senare likheten kan omformas med hjälp av (28) och (29). Man får

$$y^2{}_{2n-1} = 16h^2 - (8h^2 + 2c_{2n-1}h) - 2hk_{2n-1} =$$
$$= 2h(4h - c_{2n-1} - k_{2n-1}).$$

En jämförelse med (32) ger oss

$$s^2{}_{2n} = 4y^2{}_{2n-1} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

varur följer

$$s_{2n} = 2y_{2n-1} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

eller särskrivet

(33) $$s_2 = 2y_1, \quad s_4 = 2y_2, \quad s_8 = 2y_4, \quad s_{16} = 2y_8.$$

Men lika stora kordor upptaga ju lika stora cirkelbågar. Får β betyda längden av bågen XS_1, så är alltså

bågen XS_2 = bågen S_1V_1 = 2 ggr bågen $XS_1 = 2\beta$,
bågen XS_4 = bågen S_2V_2 = 2 ggr bågen $XS_2 = 4\beta$,
bågen XS_8 = bågen S_4V_4 = 2 ggr bågen $XS_4 = 8\beta$,
bågen XS_{16} = bågen S_8V_8 = 2 ggr bågen $XS_8 = 16\beta$.

Eftersom linjerna OT_1 och OT_{16} äro lika stora, är bågen $S_{16}X_1$ = bågen XS_1 och följaktligen är

bågen XS_{16} + bågen $S_{16}X_1 = 16\beta + \beta =$
$=$ cirkelns halva omkrets.

Bågen XS_1 är således $\frac{1}{34}$ av hela omkretsen.

För dem av tidskriftens läsare, som studerat lektor Wahlgrens uppsats, torde kanske böra påpekas, att mina kvantiteter a_1, a_2, c_1, c_2, c_3 och c_4 äro identiska med hans $\frac{z_2}{4}$, $\frac{z_1}{4}$, $\frac{y_4}{2}$, $\frac{y_3}{2}$, $\frac{y_2}{2}$ och $\frac{y_1}{2}$ resp. Slutligen vill jag omnämna, att lektor Wahlgren granskat denna uppsats i dess ursprungliga redigering och framställt vissa detaljanmärkningar, som jag delvis dragit nytta av. Jag ber att på detta sätt få till honom frambära mitt hjärtliga tack för hans värdefulla råd.

Temperaturstrålingens energifordeling.

En oversikt over de teoretiske synspunkter.

Av OLAF DEVIK.

1. *Innledning.* Som innledning til en oversikt over temperaturstrålingens energifordeling er det nyttig å minne om nogen forsök som viser strålingens viktigste egenskaper. Med en følsom termosöile er det lett å bruke en strålingskilde av relativt lav temperatur (f. eks. hånden, en svakt opvarmet plate, o. l.) og påvise, at de stoffer som viser sterk refleksjon av denne stråling til gjengjeld selv har liten emissjon, hvis de opvarmes, og omvendt at sterkt absorberende stoffer har stor emissjonsevne. At man da ofte kan bli overrasket over at den slags lav-temperatur-stråling absorberes ganske anderledes enn synlig stråling (f. eks. i en vannhinne) er en nyttig understrekning av at KIRCHHOFFS lov om emissjon og absorpsjon bare uttaler sig om forholdet mellem disse, ikke om deres faktiske störrelse.

Selv med stoffer av höist forskjellig emissjonsevne kan man imidlertid som bekjent få *samme* stråling frembragt, hvis der av stoffet dannes et *hulrum,* hvorfra strålingen kan sendes ut gjennem en åpning. Tar vi f. eks. et dobbeltvegget kar (fig. 1), og fyller varmt vann i mellemrummet, så vil en termosöile T som mottar strålingen fra åpningen A vise samme utslag enten karrets indre vegg er svertet eller blank.

Forsöket kan utföres på den måte at karret er svertet innvendig, men når hulrummets vegger skal være blanke setter man inn en blank metalcylinder, som er lukket i begge ender og har en åpning ved A. Når den har antatt karrets temperatur, gir den samme hulrumstråling som det svertete hulrum.

I et slikt hulrum må der i gjennemsnitt være termisk likevekt, da noget annet vilde stride mot den 2-nen hovedsetning i varmelæren. *Strålingen må følgelig tilskrives en temperatur som er = hulrummets* (d. v. s. veggenes), *og den må videre være helt bestemt ved den, uavhengig av hulrumveggenes natur.*

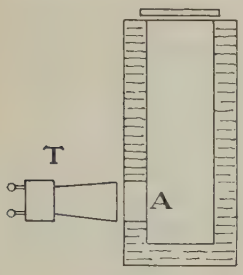


Fig. 1

Med et hulrum kan også fremstilles en fullstendig sort flate, med absorpsjonsevne = 1, nemlig en åpning som er så liten, at den termiske likevekt ikke forstyrres merkbart. Stilles to identiske hulrum mot hverandre (fig. 2), vil strålingen fra det ene inn i det annet bli absorbert fullstendig her ved de gjentagne refleksjoner. Praktiskt talt intet vil komme ut igjen. Selve åpningen har derfor både emissjonsevne og absorpsjonsevne = 1, den er m. a. o. ideel *sort.*

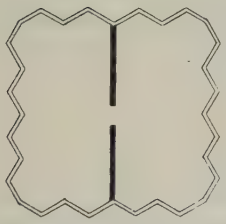


Fig. 2

Definerer vi den *sorte stråling* eller *temperaturstrålingen som utstrålingen fra* et fullstendig absorberende legeme, så kan den følgelig realiseres som *strålingen i et hulrum i temperaturlikevekt,* og gjennem et litet hul kan vi ta ut en bundt »sort» stråling.

Fig. 3

At et hulrum er *sort* også for innfaldende synlig stråling uanseet veggenes absorpsjonsevne kan man let vise ved en todelt kasse (fig. 3), hvis ene rum er malt hvitt innvendig, mens det annet er malt sort innvendig. Hull inn til begge rum ser da like sorte ut; males ytterveggen sort, vil hullene virke sortere enn veggen.

Det er selvfölgelig egentlig overflödig å bemerke at »sort» stråling er synlig når temperaturen er höi nok — enhver som har lukket op en ovnsdör vil vite at hulrumstrålingen ser man når det er varme nok i ovnen.

Var veggene i hulrummet fullstendig reflekterende, vilde det være nok til å opnå termisk likevekt mellem stråling og vegger, hvis en del av veggene hadde absorpsjonsevne $= 1$. I mange teoretiske resonnementer tenkes derfor hulrummet med diffust speilende vegger, og for å få termisk likevekt tenkes et sort korn, som står i kontakt med varmereservoiret av temperatur T, bragt inn i hulrummet.

> Det kan illustreres ved å stikke hånden ned i en blank aluminiumcylinder, som reflekterer håndens varmestråling nesten fullstendig: vi föler ganske riktig en temperatur som håndens, uaktet veggene er kolde.

2. *Eksperimentelle undersökelser.* WIEN og LUMMER var de förste som anvendte hulrumstrålingen, og i 1897—98 gjorde LUMMER og PRINGSHEIM og LUMMER og KURLBAUM de förste undersökelser over *totalstrålingen.* De fant da STEFAN-BOLTZMANNS lov

$$S = \sigma T^4$$

bekreftet i området 220°—1200° C. En rekke omhyggelige undersökelser har senere også bekreftet loven og gitt

$$\sigma = 5{,}77 \,.\, 10^{-12} \text{ watt cm}^{-2} \text{ grad}^{-4}.$$

Kjennskapet til denne konstant er selvfölgelig viktig for den fysikalske teknikk, men ikke mindre viktig er den som en av de fundamentale naturkonstanter, som strålingsforskningen har knyttet sammen.

Den neste opgave, den spektrale energifordeling, kan undersökes ved å måle energifordelingen i hulrumstrålingens böiningsspektum.

LUMMER og PRINGSHEIM (1899) benyttet speilspektrometer og flusspatprisme, samt bolometer. Resultatet av deres målinger er gitt i en kurve, som er så vel kjent, at den neppe behöver å gjengis her.

Allerede tidligere (1892) hadde PASCHEN i meget omfattende arbeider — för hulrumstråleren var kjent — fått

resultater som lå nær op til LUMMER og PRINGSHEIMS, og han utledet empirisk formlen

$$J = C_1 \lambda^{-\alpha} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}},$$

som WIEN kort efter utledet teoretisk (1893).

3. *Energifordelingen i den almindelige varmebevegelse hos èn gass innesluttet i et hulrum.*

Den sorte hulrumstråling er i likevekt med veggenes og gassens temperatur. Men denne temperatur er en *gjennemsnitts*-størrelse, som står i et bestemt forhold til molekylenes gjennemsnittlige bevegelsesenergi. Det er som bekjent lett å vise, at hvordan enn hastigheten er fordelt blandt gassmolekylene, så er trykket på grunn av den gjennemsnittlige stötimpuls mot veggene

$$p = \frac{1}{3} n m \overline{v^2} = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}. \qquad (n \text{ molekyler pr cm}^3).$$

Benytter vi tilstandsligningen $\frac{p}{\rho} = R_1 T$ (R_1 = spec. gasskonst.), ser vi at

$$T = \frac{1}{3} \frac{\overline{v^2}}{R_1}.$$

Velger vi et litet volum og en kort tid, vil $\overline{v^2}$ her kunne bli meget forskjellig fra den gjennemsnittlige for hele karret; vi ser da, at ved tilstrekkelig opdeling i volumelementer og tidselementer vil der i gassrummets enkelte volumelementer være en ytterst vekslende fordeling av trykk og temperatur, som kun i gjennemsnitt gir et ensartet trykk og en ensartet temperatur. En lignende vekslende fordeling av temperaturen vil også *veggenes* enkelte volumelementer opvise.

Hvordan nu enn sammenhengen mellem strålingen og de engagerte molekylers skiftende energi er, så er det öiensynlig av störste betydning å få rede på hvordan hastighetene faktisk fordeler sig omkring den kvadratiske middelverdi

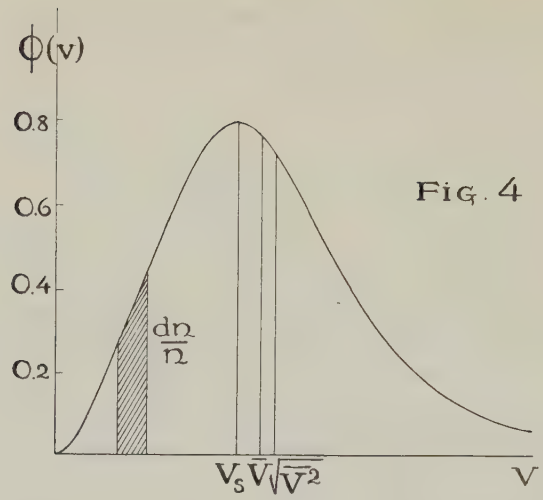


Fig. 4

blandt en gassarts molekyler. Den opgave löste allerede MAXWELL.

Av de n molekyler pr. cm^3 er det en brökdel $\frac{dn}{n}$ som har en hastighet mellem v og $v + dv$. Vi sier da, at sannsynligheten for at hastigheten er innen området v, $v + dv$ er $\frac{dn}{n}$. Vi kan sette

$$\frac{dn}{n} = \varphi(v)\, dv, \text{ hvor } \varphi(v) = \text{fordelingsfunksjon.}$$

Det er klart at

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi(\infty) = 0$$

og at

$$\int_0^\infty \varphi(v)\, dv = 1$$

hvilket forsåvidt er grunnlag nokk til å gi en idé om kurvens form (fig. 4).

Fordelingsfunksjonen $\psi(v_1)$ for en *bestemt retning* v_1 kan defineres ganske likedan, og hvis man som MAXWELL forutsetter, at *sannsynligheten som gjelder for den ene kompo-*

nent er uavhengig av de andre komponenter, m. a. o. at der er »molekular uorden», så blir

$$\frac{dn_1}{n} = \psi(v_1)\,dv_1 = f(v_x)f(v_y)f(v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z.$$

Da ψ må være uavhengig av retningen, m. a. o. invariant m. h. p. forandringer i komponentene, så kan herved fordelingsfunksjonene $f(v_x)$ og $\psi(v)$ bestemmes. Ved integrasjon over alle retninger fåes så tilslutt

$$\varphi(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\,.\,v_s^3}\,e^{-\frac{v^2}{v_s^2}}\,v^2 \qquad \text{(Maxwells fordelingslov).}$$

Her er v_s den sannsynligste, d. e. den hyppigst forekommende hastighet (fig. 4).

Definerer vi energien hos de dn molekyler som

$$u_v\,dv = \frac{1}{2}\,m\,v^2\,dn,$$

så blir

$$u_v\,dv = \frac{1}{2}\,m\,n\,v^2\,\varphi(v)\,dv$$

$$u_v = \frac{1}{2}\,m\,n\,v^2\,\varphi(v).$$

Faktoren v^2 gjör at energimaksimum ligger noget forrykket i forhold til maximum for $\varphi(v)$ nemlig ved $\sqrt{\overline{v^2}}$ (fig. 4). Da $\overline{v^2}$ er proporsjonal med gassens gjennemsnittstemperatur T, så ser man herav at *energimaksimet forskyves mot voksende v proporsjonalt med den absolute temperatur:*

$$\frac{u_{v\,\max}}{T} = \text{konst.}$$

Vi har tatt med dette for å ha sammenligningen med strålingens energifordeling mest mulig anskuelig.

Boltzmann har forbundet Maxwells fordelingslov med den 2nen hovedsettning. Hvis F er antall molekyler pr. gramm med hastighetskomponenter innenfor

$$\left.\begin{array}{l} v_x,\ v_x + dv_x \\ v_y,\ v_y + dv_y \\ v_z,\ v_z + dv_z \end{array}\right\} dv_x\, dv_y\, dv_z = d\omega;$$

altså

$$n\varphi(v)\, dv = F,$$

så kan man vise, at den relative sannsynlighet W av en viss hastighetsgruppering i gassmassen er bestemt ved

$$\text{lognat } W = -\int F \text{ lognat } F\, d\omega + \text{const}$$

og W er forbundet med gassens entropi S ved ligningen

$$S = k \text{ lognat } W + \text{const},$$

hvor $k = \frac{R}{N}$ er *Boltzmanns konstant*. Det således formulerte *Boltzmanns prinsipp* uttaler, at når S vokser, så vokser W, m. a. o. jo större entropi, dessto större sannsynlighet. Den Maxwellske hastighetsfordeling svarer til maksimum av entropi, den er m. a. o. den mest sannsynlige fordeling.

4. *Den sorte stråling fra termodynamisk synspunkt.*

Vi må först definere strålingsintensiteten av den sorte stråling for et spektralområde

$$\lambda,\ \lambda + d\lambda \text{ eller } \nu,\ \nu + d\nu.$$

Gjennem keglen med rumvinkel $d\omega$ går pr. sekund en strålingsenergi (fig. 5)

$$dP_\lambda = E_\lambda\, d\lambda \cos i\, ds\, d\omega.$$

Over en halvkule blir da strålingen fra 1 cm^2 (fig. 6)

$$ds_\lambda = \pi E_\lambda\, d\lambda.$$

For hele spektret blir strålingen ut fra 1 cm²

$$s_t = \pi \int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda \qquad (= \sigma T^4).$$

For hulrumstrålingen blir rumtettheten

$$u_\lambda = \frac{4\pi E_\lambda}{c}, \quad u_t = \frac{4}{c} s_t.$$

Erfaringsmessig vet vi, at hulrumstrålingens energitetthet bare avhenger av temperaturen: $u = f(T)$.

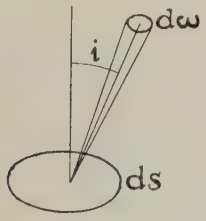


Fig. 5

Fig. 6

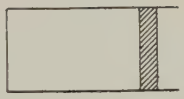


Fig. 7

Dens volum er gitt ved hulrummets volum v. Og endelig er det trykk den utöver på veggene = *strålingstrykket*. Maxwell har som bekjent påvist, at en elektromagnetisk stråling i et diffust speilende hulrum vil gi et trykk, $p = {}^u/_3 =$ energitettheten pr. frihetsgrad.

Vi kan således definere både p, v og T for hulrumstrålingen, og det må ligge nær å anvende *termodynamikkens lover* til å finne energifordelingen i et speilende hulrum med stempel (fig. 7).

Vi har:

$$\begin{cases} u = \dfrac{U}{v} = f(T), \quad du = \dfrac{dU}{dt} dT \\ p = \dfrac{u}{3} \qquad\qquad dU = v \dfrac{du}{dT} dT + u \, dv. \end{cases}$$

Den *1:ste hovedsetning* krever:

I. $$dQ = dU + pdv$$

$$= v\frac{du}{dT}dT + \frac{4}{3}udv.$$

Ved en reversibel process er iflg. den 2:nen hovedsettning $\frac{dQ}{T}$ et totalt differential:

II. $$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{v}{T}\frac{du}{dT}dT + \frac{4}{3}\frac{u}{T}dv$$

$$= \frac{\partial S}{\partial T}dT + \frac{\partial S}{\partial v}dv.$$

Herav fåes de to partielle deriverte, og deriveres pånytt m. h. p. v og T, så fåes

$$\frac{du}{u} = 4\frac{dT}{T},$$

d. e.

$$u = aT^4, \quad \text{Stefan-Boltzmanns lov.}$$

Vi kan således betrakte

$$p = \frac{1}{3}aT^4$$

som den sorte strålings »tilstandsligning». Benytter vi oss av $u = aT^4$, kan vi av differentialligningen for S bestemme denne:

$$S = \frac{4}{3}aT^3V,$$

den totale entropi.

Ved *adiabatisk* kompresjon må følgelig (da $S =$ konst):

$$T^3V = \text{konst}$$

eller

$$pV^{4/3} = \text{konst}.$$

Hittil er bare den totale stråling betraktet. Men forskyves stemplet (fig. 7), så vil ifølge DOPPLERS prinsipp hver enkelt frekvens forandres, altså også energifordelingen. WIEN beregnet, at denne forskyvning av energifordelingen skjer således, at

$$\lambda T = \lambda_0 T_0 \text{ eller } \frac{T}{\nu} = \frac{T_0}{\nu_0}.$$

Da dessuten Stefan-Boltzmanns lov gjelder for forholdet mellem intensiteten av de to farver, så må u_ν være proporsjonal T^3, d. e.

$$u_\nu = T^3 F\left(\frac{T}{\nu}\right) = \nu^3 f\left(\frac{T}{\nu}\right).$$

Videre følger

$$\lambda_{max} T = b = \text{konst.}$$

Denne WIENS *forskyvningslov* tillater å beregne energifordelingen ved hvilkensomhelst temperatur, når den er eksperimentelt bestemt ved en temperatur. Men funksjonen F:s analytiske form inneholder den ikke. For å komme videre måtte det selvsagt ligge nær å anvende den Maxwellske fordelingslov. WIEN tenkte sig således at en del av hulrummet inneholdt en gass, som ved en vegg uten absorpsjon stod i termisk likevekt med hulrumstrålingen. Hvis man da antok, at hvert molekyl sendte ut bare en slags svingning, hvis frekvens og intensitet var avhengig av hastigheten, så ga det en energifordeling

$$E_\lambda d\lambda = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{\beta_1}{\lambda T}} d\lambda$$

eller

$$K_\nu d\nu = C_2 \nu^3 e^{-\frac{\beta_1 \nu}{T}} d\nu.$$

Denne lov kan pröves på de observerte kurver. Det viste sig, at den stemte godt for korte bölger og lav temperatur, derimot blev avvikelsene större jo större λT blev.

Wiens energifordelingslov hadde åpenbart bare begrenset gyldighet.

5. *Den sorte stråling fra den statistiske mekanikks synspunkt.*

Fra en annen kant sökte RAYLEIGH og senere JEANS å få frem en generel energifordelingslov ut fra det Maxwellske *ekvipartisjonsprinsipp* som uttaler, at *ved statistisk likevekt er molekylenes energi fordelt likt på alle frihetsgrader.*

Betrakter man elektromagnetiske svingninger i et speilende hulrum, så vil der bli stående svingninger, dessto flere jo större svingetallet er. I analogi med en enatomig gass, hvor hvert molekyl får $\frac{kT}{2}$ erg for hver av sine tre frihetsgrader, antar vi at hver enkelt svingning får kT erg, svarende til to frihetsgrader. Det förer ved statistisk beregning til en energifordelingslov

$$E_\lambda \, d\lambda = \frac{c_1 T}{\lambda^4} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} d\lambda$$

$$K_\nu \, d\nu = c_1 T \nu^2 e^{-\frac{c_2 \nu}{T}} d\nu, \qquad \text{(Rayleigh)}$$

som for store λT går over i

$$K_\nu \, d_\nu = c_1 T \nu^2 \, d\nu .$$

I Jeans' form lyder den

$$K_\nu \, d\nu = \frac{kT}{c^2} \nu^2 \, d\nu . \qquad \text{(Jeans)}$$

Denne lov stemmer godt for store λT, men den er åpenbart gal, for energien vilde stige med voksende ν, og *rumtetthetен vilde bli* ∞.

Som resultat har man altså, at den vanlige statistiske mekanikks prinsipper og termodynamikkens prinsipper kun gir tilnærmete former av strålingsfunksjonen. *Det lar sig ikke gjöre å komme i full overensstemmelse med strålingens eksperimentelle data på den klassiske fysikks grunn.*

(Forts.)

Några data ur modern geokemisk forskning.

I huvudsak efter V. M. Goldschmidt.

Av GREGORI AMINOFF.

En av den nyare geokemiska forskningens uppgifter har varit att studera de kemiska grundämnenas relativa mängd och fördelning i jordskorpan. I samband härmed har man även sökt att bilda sig en föreställning om jordklotets kemiska byggnad i de delar, vilka ej äro direkt tillgängliga för iakttagelse, samt att komma till klarhet rörande jordklotets kemiska utvecklingshistoria. Det är i främsta rummet V. M. Goldschmidt's och hans skolas resultat, vilka på detta område äro aktuella, varför det synts förf. befogat att här redogöra för några av de resultat, till vilka denna skola kommit.

Uppgiften att lära känna jordskorpans kemiska sammansättning kan givetvis behandlas empiriskt genom insamlandet av ett stort iakttagelsematerial i form av kemiska anlyser av de mineral och bergarter, vilka uppbygga jordskorpan. Till en föreställning om den kemiska sammansättningen av jordens inre kan man däremot endast komma med tillhjälp av analogislut.

Vi behandla först problemet om jordklotets sannolika kemiska byggnad för att därefter övergå till frågan om elementens fördelning i jordskorpan.

Det enda vi med full visshet kunna säga om jordens inre är, att dess kemiska sammansättning måste väsentligt avvika från jordskorpans. Den genomsnittliga specifika vikten för jordskorpans bergarter är nämligen 2,7, under

det att den specifika vikt, som beräknas ur jordklotets vikt och volym, är 5,52 (GUTENBERG 1926). Vi måste ur dessa siffror draga den slutsatsen, att vissa tyngre element äro mer koncentrerade i jordens inre än i jordskorpan. Vi erhålla upplysning om vilka dessa element äro genom studiet av meteoriterna. Dessa uppfattas av den astronomiska forskningen som fragment av sönderspräng da himlakroppar, tillhörande vårt solsystem. De giva oss alltså upplysning om dessa himlakroppars kemiska sammansättning såväl i deras yttre delar som i deras inre. Å andra sidan veta vi genom spektralanalytiska undersökningar, att alla himlakroppar, vilka tillhöra vårt solsystem, väsentligen äga samma kemiska karaktär, varför vi kunna antaga, att om vår egen jord sönderspräng des, fragmenten i kemiskt hänseende skulle motsvara meteoriterna. Analyser av meteoriter visa som bekant en mycket hög halt av järn och nickel, särskilt de s. k. järnmeteoriterna, vilka i genomsnitt innehålla 90,57 % Fe och 8,71 % Ni (P. TSCHIRWINSKY; medeltal av 360 järnmeteoriter). Vi äro ur dessa data berättigade att draga den slutsatsen, att de tyngre element, vilka äro koncentrerade i jordens inre, väsentligen utgöras av järn och nickel. Lägga vi härtill de slutsatser, till vilka studiet av jordbävningsvågor leda, nämligen att jorden är uppbyggd av olika täta skikt, vilka tämligen oförmedlat övergå i varandra, så är detta ungefär all den kunskap, vi på dessa vägar kunna erhålla om den kemiska och fysikaliska byggnaden av jordens inre.

Till en betydligt mera detaljerad bild av den kemiska byggnaden hos jordens inre har V. M. GOLDSCHMIDT kommit genom att på fördelningen av grundämnena i jordens inre tillämpa erfarenheter från de metallurgiska processerna. Jorden i smält tillstånd måste tänkas erbjuda många analogier med en smälta av den art vi använda vid framställning av metaller i tekniken. Vid jordens stelnande måste därför en sortering av de olika grundämnena försiggå, som i väsentliga drag överensstämmer med den, som äger rum

vid en metallurgisk process. Vissa element avskiljas i gedigen form, t. ex. järn, nickel, kobolt, platinametaller o. s. v., andra i form av svavelföreningar, såsom koppar, zink, arsenik o. s. v., andra slutligen anrikas i slaggen i form av silikat, t. ex. aluminium, alkaliska jordartsmetaller, alkalimetaller m. fl. På detta sätt skulle jordklotet alltså vid stelningen erhålla en zonstruktur, och vi ha att vänta oss en kärna av gedigna metaller, huvudsakligen järn, omgiven av en sulfid-(och oxid-)zon, vilken i sin tur överlagras av en silikatzon motsvarande den oss åtminstone delvis tillgängliga jordskorpan. Atmosfären skulle motsvaras av den gasrest, som vid den metallurgiska processen kvarstår i jämvikt med silikatfasen.

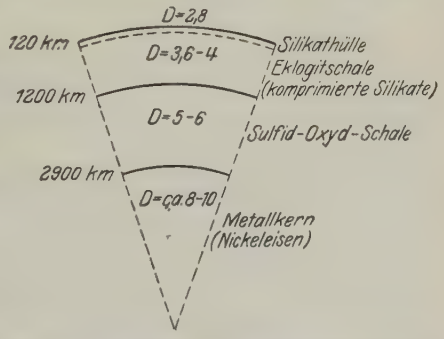


Fig. 1. Tvärsnitt av jordklotet enligt V. M. Goldschmidt med angivna djup och ungefärliga sp. vikter för de olika zonerna.

Uppenbarligen kommer man på denna väg fram till en föreställning om jordens kemiska arkitektur, som i huvudsak överensstämmer med den, vartill geofysisk forskning och studiet av meteoriterna leda. (Jfr fig. 1.) Förutsättningen för detta betraktelsesätt är, att jordklotet befunnit sig i smält tillstånd. Med nödvändighet förutsättes emellertid ej, att detta varit förhållandet samtidigt för alla delar av jordklotet.

Med hänsyn till grundämnenas tendens att vid »urmagmans» stelnande huvudsakligen koncentreras i en viss fas (metallfasen, sulfid- och oxidfasen, silikatfasen eller gasfasen) uppställer Goldschmidt en geokemisk systematik av grundämnena. (Jfr fig. 2.) De grundämnen, vilka utmärka sig genom förhållandevis ringa affinitet till syre och svavel och vilka, dels i fritt tillstånd, dels såsom järnföreningar äro lättlösliga i smältande järn, kallar han siderofila

(A i tabell 1). Dessa grundämnen, nämligen järn, nickel, platinametaller m. fl., anrikas i järnkärnan. De grundämnen, vilka å ena sidan utmärka sig genom stark affinitet till svavel och vilkas svavelföreningar å andra sidan äro lättlösliga i FeS, benämner han chalkofila (B i tabell 1). Dessa grundämnen, i främsta rummet koppar, silver och arsenik, anrikas huvudsakligen i sulfid-oxidzonen (jfr fig. 1). Såsom litofila element betecknar GOLDSCHMIDT sådana, vilka äga stark affinitet till syre och vilkas joner dessutom äro av ädelgastyp, t. ex. natrium, kalcium, aluminium

Tabell 1. Geokemisk klassifikation av de olika grundämnena enligt V. M. GOLDSCHMIDT.

A Eisen Siderophil	B Sulfid Chalkophil	C Silikat Lithophil	D Gashölle Atmophil	E Organismen Biophil
Fe, Ni, Co P, (As), C, (Ge) Pt, Ir, Os? (Pd), Ru, Rh, Mo(W)	((O)), S, Se, Te Fe, (Ni), (Co), Mn? Cu, Zn, Cd, Pb (Sn?), Ge, (Mo?) As, Sb, Bi Ag, Au, Hg Pd, (Ru?), (Pt) Ga, In, Tl	O, (S), (P), (H) — Si, Ti, Zr, Hf, Th F, Cl, Br, J B, Al, (Ga), Sc, Y, La, Ce Pr, Nd, Sm, Eu, Gd, Tb Ds, Ho, Er, Tu, Yb, Cp Li, Na, K, Rb, Os Be, Mg, Ca, Sr, Ba (Fe), V, Cr, Mn, ((Ni)) ((Co)) Nb, Ta, W, U, Sn (C)[1]	H, N^2, C^1, (Cl^2), J He, Ne, A, Kr, X	C, H, O, N, P, S, Cl, J (Ca, Mg, K, Na) (V, Mn, Fe, Cu)

och kisel. Dessa anrikas väsentligen i silikatzonen (C i tabell 1). De grundämnen, vilka äro lättflyktiga eller bilda lättflyktiga föreningar, sammanfattas under benämningen atmofila och återfinnas i atmosfären och hydrosfären (D i tabell 1). Slutligen urskiljer GOLDSCHMIDT ytterligare en femte geokemisk grupp av element, de biofila, vilka (vid en senare epok i jordens utvecklingshistoria) göra sin egenskap att gärna ingå i organisk substans gällande. Hit höra sådana grundämnen som kol, fosfor och jod (E i tabell 1).

Den här beskrivna sorteringen av grundämnena försiggår givetvis ej kvantitativt, så att ett visst grundämne exempelvis endast skulle ingå i järnfasen. Föreställningssättet innebär endast, att ett sådant element med den relativt största

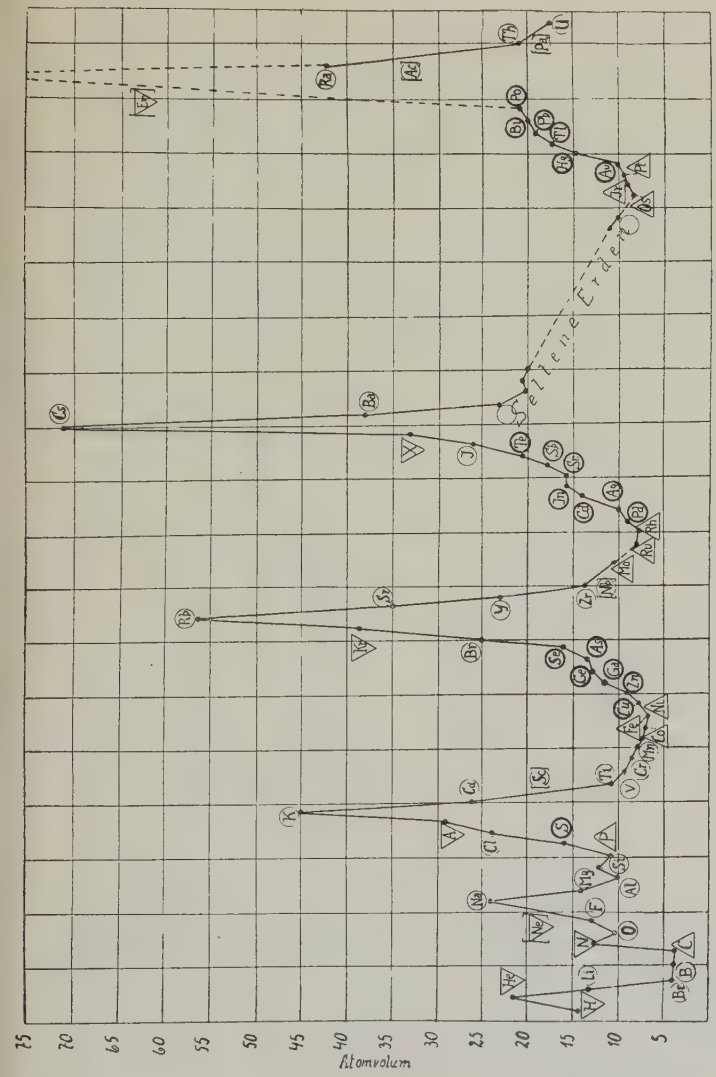


Fig. 2. Sambandet mellan grundämnenas geokemiska karaktär och deras läge på atomvolymkurvan. (Enligt V. M. GOLDSCHMIDT).

koncentrationen ingår i denna fas. Härmed sammanhänger, att samma grundämnen upptagas i flera av tabellens kolumner.

Den av GOLDSCHMIDT givna, ovan skisserade geokemiska

indelningen av grundämnena, kan bringas i samband med de olika grundämnenas ställning i det periodiska systemet (fig. 2). De siderofila elementen äga de minsta atomvolymerna, de chalkofila återfinnas på atomvolymkurvans uppstigande grenar, biofila grundämnen däremot på de nedåtgående grenarna av kurvan. De atmofila grundämnena slutligen äga stora atomvolymer och ligga i regel närmast före kurvans maxima. Uppenbarligen föreligger ett samband mellan grundämnenas (resp. deras joners) byggnad och deras geokemiska karaktär.

Grundämnenas geokemiska karaktär har av GOLDSCHMIDT och hans medarbetare i ett flertal fall direkt studerats. Sålunda visa nedanstående siffror tydligt platinametallernas siderofila karaktär. Enligt analyser av M. JOHNSSON-HÖST innehåller järnet i den bekanta, av A. E. NORDENSKIÖLD uppdagade järnförekomsten vid Ovifak på Grönland, 4,0 g Pt-metaller pr ton, under det att den omgivande basalten enligt två bestämningar endast innehåller 0,20 resp. 0,24 g pr ton. Förhållandet i meteoriter är detsamma, i det man i meteorjärnet finner avsevärda mängder Pt-metaller, i stenmeteoriter endast spår. Guld och silver uppträda i väsentligt större koncentration i järnsulfidfasen (troiliten) i meteoriterna än i nickeljärnet, utvisande dessa metallers chalkofila karaktär.

*

Givetvis har själva jordskorpans kemiska sammansättning det största intresset för oss, då den ju är direkt tillgänglig för analys, varigenom vi omedelbart kunna studera grundämnenas fördelning i densamma. Den fråga, vi i detta sammanhang närmast ha att besvara, rör jordskorpans genomsnittliga sammansättning. De första, i större skala gjorda beräkningarna i avsikt att besvara denna fråga, gjordes av WASHINGTON och CLARKE, vilka beräknade ett på flera tusen bergartsanalyser baserat värde på jordskorpans kemiska sammansättning ned till ett uppskattat djup av 16 km. Tab. 2 återger efter NIGGLI (1921) en tabell grundad

på dessa beräkningar och återgivande mängden av olika element i jordskorpan i viktsprocent. Ur tabellen framgår, att redan de två rikligast företrädda elementen, syre och kisel, till mera än 74 % ingå i jordskorpan. De element, vilka till mera än 1 % förefinnas i jordskorpan, äro till antalet endast åtta. Alla övriga uppträda endast i en kon-

Tabell 2. Jordskorpans halt av viktigare grundämnen, uttryckt i viktsprocent, enligt P. Niggli på grundval av Washington och Clarke's beräkningar gällande eruptivbergarter intill ett djup av 16 km. Asterisker symbolisera mindre säkra siffror på motsvarande plats efter decimalkommat.

O	= 46,43	Li	= 0,003
Si	= 27,77	Cu	= 0,002
Al	= 8,14	Selt. Erd.	= 0,001
Fe	= 5,12	Be	= 0,00**
Ca	= 3,63	Co	= 0,00**
Na	= 2,85	B	= 0,000*
K	= 2,60	Zn	= 0,000*
Mg	= 2,09	Pb	= 0,000**
Ti	= 0,629	As	= 0,000**
P	= 0,130	Cd	= 0,000 0**
H	= 0,127	Sn	= 0,000 0**
Mn	= 0,096	Hg	= 0,000 0**
F	= 0,077	Sb	= 0,000 0**
Cl	= 0,055	Mo	= 0,000 0**
S	= 0,052	Ag	= 0,000 00**
Ba	= 0,048	W	= 0,000 00**
Cr	= 0,037	Bi	= 0,000 00**
Zr	= 0,028	Se	= 0,000 000**
C	= 0,027	Au	= 0,000 000**
V	= 0,021	Br	= 0,000 000**
Ni	= 0,019	Te	= 0,000 000 0**
Sr	= 0,018	Pt	= 0,000 000 0**

centration, motsvarande en bråkdel av en procent, de flesta i ytterligt ringa mängd. Tab. 3 (efter Goldschmidt 1931) återger procenthalten för de nio i jordskorpan vanligaste grundämnena, grundad på nyare beräkningar. Viktsprocenten återfinnes i den första kolumnen; i den andra kolumnen äro dessa tal omräknade i atomprocent; härvid ökas procenttalet för syre till 62,46 %. Av hundra atomer i jordskorpan äro alltså ej mindre än 62 syreatomer. Tar man hänsyn även till jonradierna (angivna i Ångströms-enheter; se vidare nedan), beräknas de i fjärde kolumnen anförda

Tabell 3. Procenthalt för de i jordskorpan vanligaste grundämnena enligt V. M. Goldschmidt.

	Gewichts-prozente	Atom-prozente	Radius Å	Volum-prozente
O	46,59	62,46	1,32	91,77
Si	27,72	21,01	0,39	0,80
Al . . .	8,13	6,44	0,57	0,76
Fe . . .	5,01	1,93	0,82	0,68
Mg . . .	2,09	1,84	0,78	0,56
Ca . . .	3,63	1,93	1,06	1,48
Na . . .	2,85	2,66	0,98	1,60
K	2,60	1,43	1,33	2,14
Ti	0,63	0,28	0,64	0,22
				100,01

volymprocenttalen. På grund av den tvåvärda syrejonens stora volym stiger härvid siffran för syre än mera. Jordens yttersta hölje, litosfären, kan i huvudsak betraktas som en packning av syrejoner, sammanhållna av de väsentligt mindre kisel- och metalljonerna. Fig. 3 återger en bild av atomanordningen av ett silikat (beryll), där syrejonernas storlek i förhållande till kationernas åskådliggöres.

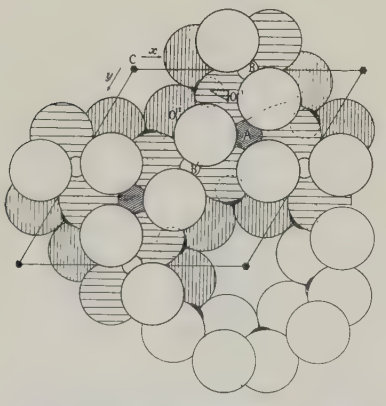


Fig. 3. Atomanordningen i silikatet beryll, utvisande det relativt stora utrymme, som syrejonerna (stora cirklar) upptaga i jämförelse med beryllium- och kiseljonerna (små cirklar). Streckningen anger olika nivåer. (Enligt W. L. Bragg).

En god översikt över sambandet mellan elementens atomnummer och deras koncentration i jordskorpan ger en grafisk framställning, där atomnumret är abscissa, koncentrationen ordinata. En sådan framställning (efter Ida och Walther Noddack 1927) återfinnes i fig. 4, där dock som ordinata logaritmen för atomkoncentrationen är avsatt. I denna grafiska framställning kan den s. k. Oddo-

Harkinska regeln, som innebär, att grundämnen med jämnt antal elektroner (atomnummer) äro vanligare än sådana med

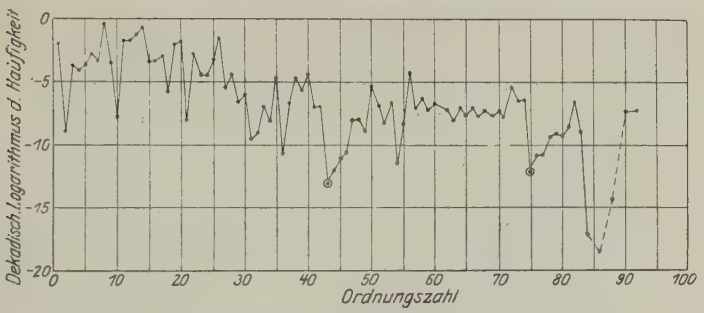


Fig. 4. De olika grundämnenas frekvens i jordskorpan. Kurvan illustrerar ODDO-HARKINS regel. Cirklarna beteckna masurium och rhenium. (Enligt IDA och WALTHER NODDACK).

udda, flerstädes avläsas. Denna lagbundenhet visar sig också vid grafisk framställning av den genomsnittliga ke-

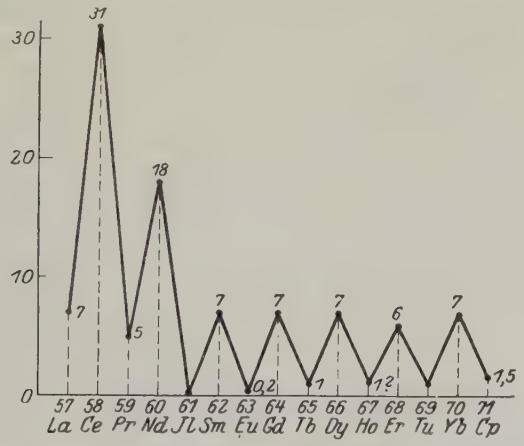


Fig. 5. Den relativa frekvensen av en del sällsynta jordartsmetaller i jordskorpan. (Enligt V. M. GOLDSCHMIDT och L. THOMASSEN).

miska sammansättningen av meteoriter, liksom även i stjärnatmosfären och i solens atmosfär. Synnerligen åskådligt illustreras den av de sällsynta jordartsmetallernas relativa

frekvens (fig. 5). Kurvan häröver är baserad på en spektrografisk analys av ett mycket stort antal mineral, vilka föra sällsynta jordartsmetaller, utförda av GOLDSCHMIDT och THOMASSEN 1924.

Som en allmän regel gäller även, att koncentrationen i jordskorpan är väsentligt större för element med lågt atom-

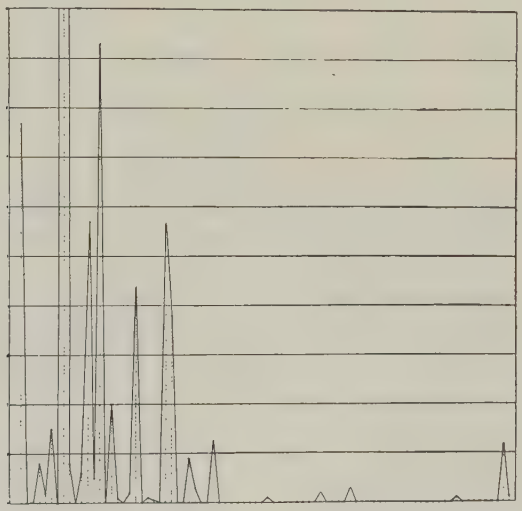


Fig. 6. Kurva utvisande de olika grundämnenas frekvens gällande för Långbans mineralförekomst. Atomnumret utgör abscissa, frekvensen, uttryckt i atomprocent, är avsatt som ordinata. Kurvan är ej direkt jämförbar med fig. 4, då ordinatan här ej är logaritmisk. Den utanför figuren fallande frekvensen representerar syre. Den sista till de större frekvenserna hörande toppen representerar As (33). Följande smärre toppar representera resp. Mo (42), Sb (51), Ba (56), Wo (74) och Pb (82).

nummer än för sådana med högre. Närmare bestämt är ett grundämnes koncentration omvänt proportionellt mot sjunde till åttonde potensen av atomnumret.

I fig. 6 är en kurva återgiven, vilken illustrerar den genomsnittliga kemiska sammansättningen i ett begränsat och kemiskt egenartat område av jordskorpan, nämligen Långbans gruva i Värmland. I beräkningen har här medtagits

järn- och manganmalmerna, dolomiten, i vilka dessa äro belägna, samt de delvis kemiskt mycket säregna skarn- och sprickmineral, för vilka denna mineralfyndort är känd. Då det här gäller en mineralfyndort av i huvudsak järn- och manganoxider samt karbonatbergarter, är givetvis halten av Si väsentligt lägre än i liknande beräkningar för hela jordskorpan. Vissa drag äger dock denna kurva gemensam med liknande återspeglande hela jordskorpans sammansättning. Sålunda överväga starkt element med låga atomnummer, liksom även den ovan omtalade Oddo-Harkinska regeln på ett flertal ställen kommer till synes. Större koncentration än normal utmärka bl. a. Be, Mn, As, Sb och Ba.

*

Som ovan framhållits anser GOLDSCHMIDT sorteringen av de olika grundämnena vid »urmagmans» stelnande närmast sammanhänga med deras affinitetsegenskaper, varvid de i huvudsak koncentreras antingen i järnkärnan, i sulfid- och oxidskiktet eller i silikatskiktet. Vid fördelningen i detta senare göra sig emellertid andra atom- (resp. jon-) egenskaper gällande, nämligen i främsta rummet atom- (resp. jon-) storleken. De sista decenniernas kristallstrukturforskning har bl. a. skapat ett mycket stort erfarenhetsmaterial rörande atomernas och jonernas storlek, eller, försiktigare uttryckt, verkningsområden i kristallerna. Man har därvid utgått från den av WASASTJERNA på grundval av optiska data för koksaltstrukturen beräknade radien hos den tvåvärda syrejonen, uppfattad som sfärisk, nämligen 1,32 Å. E. Ur kristallstrukturbestämningar ha med ledning härav atom- och jonradier beräknats för de flesta grundämnen.

»Under det att fördelningen av en atomart mellan flytande (och gasformiga) faser regleras av resp. atomarters fysikaliskt-kemiska affinitetsegenskaper, kommer för inträdandet i ett bestämt kristallgitter väsentligen i fråga, huruvida den beträffande atomen (eller jonen) i avseende på storlek så nära överensstämmer med en huvudbeståndsdel

i kristallgittret i fråga, att den kan upptagas i nämnda gitter» (Goldschmidt; Die Naturwissenschaften 1931).

Att vissa atomer eller joner kunna ersätta andra i ett kristallgitter, är ett sedan långt tillbaka känt faktum. Förtjänsten av att ha framhållit, att denna förmåga sammanhänger med nära lika storlek hos den ersättande och den ersatta jonen, tillkommer H. G. Grimm.

Kristallisationen av en smälta leder alltså till att de joner, vilka på grund av alltför avvikande storlek ej kunna upptagas i de under kristallisationsprocessen bildade kristallerna, anrikas i moderluten till dess att deras koncentration är så stor, att de kunna bilda egna mineral. I silikatmagmans moderlut anrikas följaktligen sådana joner, vilka antingen äro för små eller för stora för att kunna ingå i de vanliga silikaten, d. v. s. fältspatmineral, hornblende, pyroxenmineral etc.

En konsekvens härav är, att vi böra vänta oss en anrikning av mycket små eller stora joner i sådana geologiska bildningar, vilka äro produkter av magmatiska moderlutar. Typiska sådana bildningar äro i främsta rummet pegmatiter, vidare »pneumatolytiska» mineralbildningar, d. v. s. sådana, vilkas bildning står i samband med ur magma avvikande gaser, samt »hydrotermala» bildningar, bildade ur vattenrika magmatiska restlösningar. I alla dessa mineralbildningar återfinna vi i verkligheten de mycket stora och mycket små jonerna, såsom exempelvis de små jonerna av Be^{+2} och B^{+3}, de stora jonerna av de sällsynta jordartsmetallerna, uran m. fl. Tab. 4 (enl. Goldschmidt 1931) ger en översikt över förekomsten av detta slag av joner i moderlutar efter silikatmagmor.

Vi få alltså på detta sätt en enkel förklaring på det sedan länge väl kända förhållandet, att mineral av i jordskorpan eljest ovanliga element företrädesvis påträffas i pegmatiter och andra geologiska bildningar, vilkas bildning står i samband med magmatiska moderlutar. Särskilt i pegmatiter söka vi ju med framgång »sällsynta» mineral, litiummine-

Tabell 4.[1]

Typiska element och radikaljoner ur silikatmagmornas moderlutar		
Pegmatiter	Mineralbildning ur magmatiska gaser	Hydrotermal mineralbildning
Li, (Os)	Li	Ag, Au
Be, (Mn)	Cu	Zn, Pb, Cu, Ba, (Sr), Mn
B	B	(B)
Sc, Y, La, Ce, Pr	Sc, As	As, Sb, Bi
Nd, Sm, Eu, Gd		
Tb, Dy, Ho, Er		
Tu, Yb, Cp		
Ti, Zr, Ce, Hf, Th	Sn	
Nb, Ta, (P)	P, (Ta)	
Mo, (W), U	Mo, W	(Mo), U
F, Cl, OH	F, Cl, OH	F, Cl, OH
CO_3	CO_3	CO_3
(S)	S	S, Se, Te

ral, bormineral, berylliummineral, mineral med sällsynta jordartsmetaller etc.

*

Sådana fall, där en (sällsyntare) jon eller atom ersätter en annan (vanligare) på grund av överensstämmande storlek, kallar GOLDSCHMIDT för »camouflage». Som ett första exempel härpå kunna vi studera förekomsten av elementet gallium. Gallium upptäcktes i zinkblende, men har sedermera påträffats i järnmalmer, aluminiummineral, meteoriter o. s. v. Det mineral, i vilket gallium i största mängd ingår, är germaniummineralet germanit, som håller 0,7 % Ga. En omfattande undersökning av denna metalls förekomst i litosfären är utförd av GOLDSCHMIDT och PETERS 1931. Resultatet av denna är att gallium regelbundet, ehuru i

[1] För resp. förekomster särskilt typiska element understrukna med ett eller två streck.

ringa mängd (av storleksordningen 10^{-1} till 10^{-4} %) ersätter aluminium i ett mycket stort antal aluminiummineral. De båda jonernas dimensioner äro

$$Ga^{+3} = 0{,}62 \text{ Å. E.}$$
$$Al^{+3} = 0{,}57 \text{ Å. E.}$$

Ett annat exempel på camouflage lämnar förekomsten av germanium. Detta grundämnes fyrvärda jon har en radie, som nära överensstämmer med den fyrvärda kiselns, eller

$$Ge^{+4} = 0{,}44 \text{ Å. E.}$$
$$Si^{+4} = 0{,}39 \text{ Å. E.}$$

Germanium ersätter också kisel i ett stort antal silikat i litosfären. Den största mängden germanium har dock stannat i jordens järnkärna samt i sulfidzonen. Den i silikatfasen kvarstående mängden har emellertid fixerats i silikat som ett resultat av överensstämmelsen i storlek mellan Ge^{+4} och Si^{+4}.

Rörande germaniums intressanta geokemi har GOLDSCHMIDT (1930) lämnat ytterligare bidrag. Utgångspunkten härvidlag var, att germaniumdioxiden är lättare löslig i vatten än kiseldioxiden. I cirkulerande vattenlösningar måste alltså germanium antagas vara anrikat på bekostnad av kisel. Germanium kan emellertid ur sådana lösningar utfällas av reducerande ämnen i form av tvåvärda föreningar. Som reduktionsmedel kommer i naturen framför allt kol i fråga. Germanium eftersöktes därför i talrika förekomster av brunkol, stenkol, antracit och grafit, varvid det visade sig i avsevärd mängd förekomma i många dylika bildningar, i ett fall med en halt av storleksordningen 0,01 %. Men även produkter, erhållna vid förbränning av kol, visade sig innehålla germanium. Sålunda visade sig redan vid undersökningen av sot från värmeledningsanläggningen i mineralogiska institutet i Göttingen, där dessa undersökningar utfördes, att detta innehöll avsevärda mängder germanium. (Forts.)

Bokanmälningar.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Walter De Gruyter & Co, Berlin, Leipzig, 1931—32. Bd 51: 1, 2, 3, Bd 53: 1, 4, Bd 54: 1—5, Bd 55_1: 1—5. 100 à 135 RM per årgång. (Se närmare »Insänd litteratur» i tidigare häften.)

Revue semestrielle des publications mathématiques, Deel 37, Jaargang 1932. Nr 1. Samma förlag. 12 RM för 6 häften om året.

Den förstnämnda redan klassiska tidskriften (under många år redigerad av E. Lampe) utgives numera av preussiska vetenskapsakademien och medarbetarstaben har liksom referatens antal mångdubblats sedan första bandet för mer än sextio år sedan utkom. För vetenskaplig matematisk forskning är denna tidskrift ett hart när oumbärligt hjälpmedel på samma gång som den bär ett övertygande vittnesbörd om den matematiska litteraturens utomordentliga och växande omfång. Utom för den »rena» matematikens olika discipliner finnas även avdelningar för mekanik, astronomi, matematisk fysik (relativitetsteori, kvantateori) m. m. Referaten innehålla även påpekanden av felaktigheter (det tidigare delvis använda systemet med »autoreferat» synes numera vara övergivet). Om studieområde annonserats »vikt» för fortsatta undersökningar, meddelas även detta. Praktiskt taget all litteratur beaktas, ej enbart högre matematik. Avdelningarna för elementär algebra och geometri, matematikens historia, personhistoria, filosofi, pedagogik innehålla mycket av intresse för elementarläraren. Även examens- och övningsuppgifter citeras på vederbörliga ställen, så att uppsökandet av en viss problemsort ej erbjuder någon större svårighet där tillgång finnes till originallitteraturen. Av varje årgång (som behandlar ett års skörd) får man numera köpa även enstaka häften (Bd 55 kommer i två delar på 5 häften vardera). Från och med detta år utgives även den senare tidskriften av preussiska akademien med särskild medverkan av nederländska vetenskapsakademien. All under två sucessiva månader utkommande litteratur (även tidskrifternas bibliografiska avdelningar refereras) uppräknas i ett häfte av revuen vid tredje månadens slut. I sinom tid komma sedan de utförliga referaten i systematisk uppställning i »Fortschritte».

Härigenom synes det vara sörjt på bästa sätt både för snabbheten och vederhäftigheten i det matematiska underrättelseväsendet.

Josef Andersson.

Ole Peder Arvesen, *Innføring i Nomografi.* H. Aschehoug & Co, Oslo 1932, 57 sid., kr. 3: 75.

Nomografien, som går ut på att medelst olika system av numrerade linjer (eller punkter) uti en plan bild giva en grafisk framställning av sambandet mellan ett flertal variabler, är ett matematiskt-tekniskt hjälpmedel av utomordentlig betydelse. Nomografiens användning har också under de senaste decennierna spritt sig i allt vidare kretsar; dess elementära karaktär borde bidraga till att även göra den till ett värdefullt hjälpmedel vid elementarundervisningen. Någon framställning av nomografiens metoder på vårt språk har endast förekommit inom artilleriteknisk litteratur. Föreliggande lilla arbete av docenten i beskrivande geometri vid Norges tekniska högskola, O. P. Arvesen, kan därför vara värd uppmärksamhet även hos oss, ty det har förtjänsten av att inom en tämligen snäv ram giva en klar och mångsidig överblick över nomografiens arbetsmetoder för det enklare, men grundläggande fallet, då det gäller ett samband mellan tre variabler.

Arbetet är väl disponerat, och förf. söker progressivt föra läsaren fram till nomografiens kardinalproblem: anamorfosen. Emellertid kan det nog sägas, att denna progressiva framfärd något utsuddar skärpan i framställningen. Den på området mindre erfarne läsaren, och det är ju till denne förf. egentligen vänder sig, som på sid. 15, 24, 26, 35 och 36 får till livs en progression av olika, i själva verket ganska relativa formuleringar av det »nødvendige och tilstrekkelige» villkoret för erhållandet av ett »rettlinjenomogram» kan nämligen härav lätt bli konfunderad, ty det kan knappast begäras att läsaren omedelbart fattar, vilka de tysta förbehåll äro, som förf. under progressionen så småningom frigör sig från, innan han kommer till det definitivt nödvändiga och tillräckliga villkoret — som för övrigt är så komplicerat att det icke i förf:s lilla uppsats kan formuleras. Det kan därför vara på sin plats att här söka skingra de möjligheter till missförstånd, som detta eljest förträffliga arbete skulle kunna orsaka.

Liksom man kan tänka sig en linje i form av en skala utgöras av en rad numrerade punkter, vilka entydigt representera olika värden av en kontinuerlig variabel, fastän man i praktiken blott utsätter vissa tvärstreck med språngvis numrering, så kan man tänka sig ett stycke av ett plan utgöras av en kontinuerligt över-

svepande följd av numrerade kurvor, ävenledes entydigt motsvarande en variabel (kurvorna böra då icke inbördes skära varandra eller sig själva). Två sådana numrerade, varandra överkorsande kurvskaror bilda ett slags rutnät och konstituera det mest generella koordinatsystemet. Det kartesianska koordinatsystemet är det specialfall härav, då vardera kurvskaran är ett system räta linjer med likformig numrering och med rät vinkel mellan de båda linjesystemen. I det generella fallet angiver vardera skarans ordningsnummer värdet på motsvarande variabel, säg z_1 och z_2; varje punkt i planet är en korsningspunkt mellan två kurvor, en från vardera skaran, och motsvarande z_1- och z_2-värden äro punktens koordinater. Låter man nu en tredje, i z_3 numrerad kurvskara överkorsa de båda föregåendes rutnät, så går genom varje punkt i planet tre kurvor, en från vardera skaran, och till punkten samordnas tre värden av variablerna z_1, z_2, z_3. Detta numrerade kurvdiagram eller *nomogram* representerar därför ett samband $\Phi(z_1, z_2, z_3) = 0$ mellan de tre variablerna; vid korsningspunkten till kurvan z_1 och kurvan z_2 kan man på den genom punkten gående tredje kurvan avläsa motsvarande z_3-värde. Vilket detta samband är, beror i någon mån av de tre kurvskarornas form, men framför allt av deras numrering, ty tänker man sig nomogrammet uppritat på en kautschukhinna, så är det uppenbart att funktionssambandet (det numeriska sambandet) icke på något sätt ändras, om man genom hinnans formförändring ändrar kurvornas geometriska karaktär. Nomografiens kardinalproblem är att genom variabeltransformation åstadkomma en sådan formförändring på rent matematisk väg, s. k. *anamorfos*, att alla tre kurvskarorna bli system räta linjer, varigenom nomogrammets konstruktion kan utföras medelst linjal. Den svensk-amerikanske matematikern Håkan Grönwall, vid sekelskiftet en av Stockholms högskolas mest lovande studerande, har 1912 angivit de analytiska villkoren för problemets möjlighet. Den franske ingenjören Lalanne gav redan 1843 en första speciell, praktisk lösning genom införandet av logaritmiska rutnät, som sedan varit förebildlig för sådan anamorfos som svarar mot att man töjer ett kartesianskt rutnät parallellt med vardera axelriktningen. Den belgiska ingenjören Massau uppställde 1884 ett praktiskt villkor för den allmänna anamorfosen.

Uti kap. I studerar förf. kartesianska nomogram, d. v. s. sådana nomogram vid vilka det vanliga kvadratiska rutnätet med dess likformiga gradering uppbär ett tredje numrerat kurvsystem, och förf. visar, att man genom ombyte av längdenheter, moduler, i absciss- och ordinatled kan begränsa ett sådant nomograms pap-

persutrymme. När förf. på sid. 15 undersöker villkoren för att få rätliniga nomogram, sker detta just under den tysta förutsättningen att anamorfosen motsvarar utbyte av längdenhet d. v. s. likformig töjning parallellt med absciss- och ordinataxlarna. I kap. II övergår förf. till de olikformiga skalorna, »funksjonsskalaer», som en förberedelse till den Lallanne'ska anamorfosen vid vilken absciss- och ordinataxeln ha olikformig gradering. Kap. III ägnas anamorfosproblemet, och anamorfosbegreppet tages till en början i rent Lallanne'sk anda d. v. s. såsom motsvarande att nomogrammet formförändras genom olikformig töjning parallellt med axlarna i ett kvadratiskt rutnät, varvid kvadraterna förändras till rektanglar med växlande proportion hos sidorna. Det är under denna speciella förutsättning förf. på sid. 26 angiver »den almindelige form for de ligninger som kan avbildes ved rettlinjenomogrammer» och först på sid. 34 vänder sig förf. till det generella Massau-Grönwallska problemet, vilket dock blott antydningsvis vidröres. I kap. IV avhandlar förf. slutligen den av d'Ocagne angivna formen av nomogram, vid vilka tre numrerade skalor ersätta de tre kurvsystemen och vid vilka samhöriga värden bestämmas därigenom att de ligga på samma räta linje. Förf. klarlägger därvid på ett enkelt sätt den dualistiska motsvarigheten mellan de bägge nomogramtyperna, men synes något starkt bunden till d'Ocagnes äldre arbeten. *Alfred Liljeström.*

Elsie Hultén, *En kolatoms öden.* P. A. Norstedt & Söner (i serien De ungas bokserie) Stockholm 1932, 62 sid., häft. kr. 0: 90.

Det är ett tidstecken, som icke saknar ett stänk av pikanteri, att en författare sätter i de allra yngstas händer en bok, som konsekvent behandlar några kemiska förlopp från atomens synvinkel. Det är vad fil. lic. E. Hultén har gjort i sitt lilla arbete, vari hon följer en kolatoms skiftande öden från en på det hela taget djup sömn i stenkolslagret förbi diverse stationer fram till en slickepinne, varifrån den — i sista stycket — via läsarens matsmältningskanal och blodbanor ånyo kommer ut i luften för att där börja sin glada dans, buren under armarna av två syreatomer. Att ge ett objektivt omdöme om ett arbete av denna art, är icke så lätt. Dels är rec. ingen vän av den lekfulla kemien, för vilken denna framställning måste sägas vara en extrem exponent, dels bör man nog gå till studiet därav med det oförvillade sinne, som endast den avsedda ungdomliga läsekretsen besitter. Den i kemi något hemmastadde faller lätt för frestelsen att på varje rad konfrontera förf:s fantasteri med den kalla verkligheten, m. a. o.

att tänka efter, vad det är för fakta, som dölja sig i den brokiga dräkten och i vad mån det råder kongruens mellan läsarens kanske något torra bild av verkligheten och författarens. Alla läroböcker utgöra en blandning av nästan sant, halvsant och ren lögn, och jämvikten mellan dessa ingredienser förskjutes med nödvändighet till förmån för de båda senare, ju kortare och populärare arbetet är. Och det kan nog inte hjälpas, att kolatomens öden, så som de här skildras, äro en smula retuscherade. Förf. försvarar på ett ställe (qui s'excuse s'accuse) sin användning av drastiska och målande uttryck med att dylika alltjämt äro gängse i kemien, och hon har onekligen rätt däri, men utvecklingen har dock gått i riktning av att ersätta de antropomorfa uttrycken i kemien med nyktra mekaniska storheter — för att taga ett exempel, atomernas armstyrka med elektriska kraftfält o. s. v. Men förf. kallar vissa enzymer fångvaktare, som befalla druvsockermolekylerna att sammansluta sig till stärkelsemolekyler för att nu inte längre kunna komma ut ur cellfängelset. En gripen läsare skulle här kunna tänkas utbrista: dumma kolatom! Det händer också, att det ena äventyret slår ihjäl det andra. Eller hur skall man förlika med varandra påståendet på sid. 21, att det »mellan jorden och månen inte finns en enda liten molekyl en gång» med uppgiften nästan i samma andedrag, att månens luft har utvandrat till andra himlakroppar.

Trots allt har anmälaren haft mycket stort nöje av förf:s saga om kolatomen, så lustigt friskt, så respektlöst och trevligt är den skriven. Som sagt, det skulle vara roligt att få ett omdöme från den oförvillade ungdom, till vilken arbetet vänder sig. Kanske har förf. funnit, vad så många av oss förgäves söka: nyckeln till ungdomens intresse. I så fall skall ingen neka henne sin lyckönskan. *G. Starck.*

Eva Ramstedt, *Marie Curie och radium.* P. A. Norstedt & Söner (i serien De ungas bokserie), Stockholm 1932, 58 sid., häft. kr. 0: 90.

Marie Curie och hennes hängivna, osjälviska arbete i vetenskapens tjänst och till mänskligheten fromma, skildras här på ett sätt, enkelt och flärdfritt, som gör ett djupt intryck på läsaren. Det lilla häftet är redan ur denna synpunkt ypperligt att sätta i händerna på de unga. Därtill kommer, att det sakligt och lättfattligt ger läsaren en inblick i de radioaktiva processernas underbara värld.

Sällsynt väl äro ju upptäckterna kring radium ägnade att belysa vetenskapsidkarens tålmodiga, ihärdiga arbete från fenomen

till fenomen, och kunna de oanade praktiska konsekvenserna av ett specifikt vetenskapligt inriktat arbete framträda klarare än genom skildringen av radiums medicinska betydelse?

Det lilla häftet rekommenderas ej blott till de unga. Även fackmannen läser det med behållning, skrivet som det är av en penna med intim kännedom om personen och verket, om Marie Curie och hennes livsgärning. *C. E. Blom.*

John Lundberg, *Handledning vid laborationer i kemi på gymnasiet.* P. A. Norstedt & Söners förlag (Svenska bokförlaget). 1932, 64 sid., kr. 1:50.

Genom införandet av enskilt arbete för eleverna på gymnasium och genom att de kemiska laborationerna gjorts obligatoriska har, glädjande nog, studiet av kemi vid våra högre allmänna läroverk mera kommit till sin rätt.

Få områden inom kemien torde ligga bättre till för elevernas självständiga verksamhet än den kvalitativa analysen. Härvid tvingas ju eleven att erinra sig en mångfald kemiska reaktioner, samtidigt som verksamheten ställer stora fordringar på ordning och noggrannhet hos sina utövare.

Det är detta, författaren av föreliggande handledning i främsta rummet tagit sikte på, då huvuddelen av framställningen ägnats åt analys.

Efter en del behjärtansvärda ordningsföreskrifter för arbete på kemiska laboratorier i allmänhet, lämnar författaren en översikt över den uppsättning reagens, som lämpligen bör stå till laborantens förfogande, samt recept å reagensens beredning.

Härefter göres laboranten, som vanligt, förtrogen med de reaktioner, som ligga till grund för analysgången, innan denna meddelas i sin helhet. Laboranten får själv införa sina gjorda rön i tabeller efter varje grupp syror eller metaller och vinner sålunda förståelse för vad som ligger bakom analysgångens slutgiltiga föreskrift.

För prov på negativa joner förutsättes, att provet ej innehåller fluorider, cyanider, ferro- och ferricyanider eller halogener i blandning.

Efter en kort antydan om det villkor, massverkans lag uppställer för uppkomsten av en fällning, göres laboranten förtrogen med metallsaltlösningarnas förhållande till svavelväte, och hurusom man genom reglering av svaveljonkoncentrationen kan ernå utfällning av metallernas sulfider i olika etapper. De erhållna sulfidernas varierande löslighetsförhållanden möjliggör ett fortsatt särskiljande.

I analogi härmed studeras förhållandet till alkaliska vätskor.

Till sist behandlas inverkan av karbonat, de speciella reaktionerna på alkalimetallerna och på magnesium, några reaktioner på torra vägen såsom lågreaktionerna samt boraxpärlan.

Nu äro vi färdiga för analysgången, men först måste betonas, huru viktigt det är, att alla utfällningar och uttvättningar ske fullständigt, då den fortsatta analysen förutsätter frånvaron av föregående metaller. Detta framhålles också med vederbörligt eftertryck.

Den analysgång, som lämnas, bygger naturligtvis, som författaren framhåller, på den klassiska. Följande förenklande förutsättningar göres emellertid, vilka synas mig motiverade.

Provet bör, om det ej redan föreligger i lösning, kunna bringas därhän med tillhjälp av vatten, saltsyra eller salpetersyra. Det får ej innehålla kadmium, ej heller samtidigt kobolt och nickel eller samtidigt kalcium, barium och strontium eller klorid tillsammans med bromid och jodid.

En liten avvikelse från den gängse analysgången förekommer, nämligen den att fällningen med saltsyra ej frånfiltreras, utan provet fälles med svavelväte direkt efter surgörning. Silver avskiljes sedermera med saltsyra.

På kobolt och nickel prövas endast med boraxpärlan och på de tvåvärda alkaliska jordmetallerna endast medelst lågreaktionerna.

Framställningen illustreras medelst reaktionsformler i sådant antal, att reaktionsförloppet på varje punkt är klarlagt.

Som allmänt omdöme om denna del av boken må framhållas, att författaren lyckats giva sin framställning ett synnerligen väl avvägt format.

De handledningar i kvalitativ analys å skolstadiet, som redan föreligga, äro ofta i knappaste laget åtminstone för dem, som arbeta enskilt, då däremot större böcker sådana som Lovén och Rambergs äro väl digra för gymnasisten.

Då föreliggande bok synes hava träffat den gyllene medelvägen i detta avseende, kommer den säkert att bliva till stor nytta för undervisningen.

Sedan sålunda den kvalitativa analysen behandlats på de 38 första av bokens inalles 64 sidor, inviges läsaren i kvantitativ analys, varvid följande behandlas: bestämning av koppar, sulfat och kristallvattenhalt i kopparsulfat, titrering på HCl och NaOH, titrering av vätesuperoxid med permanganat samt volymetrisk bestämning av syrehalten i luft.

Härefter ger författaren exempel på organiska synteser såsom

framställning av etylacetat, tvål, nitrobensol samt torrdestillation av trä.

Sista kapitlet ägnas åt molekylarviktsbestämningar enligt V. Meyer och fryspunktsnedsättningsmetoden.

Till sist lämnas en del tabeller såsom över de vanligaste grundämnenas atomvikter, över de viktigaste syrornas och basernas procenthalt och motsvarande spec. vikt samt över vattenångans maximitryck vid olika temperaturer.

Samuel Hennichs.

Naturforskaren, organ för naturvetenskapligt intresserad svensk ungdom. Utgivare: Stockholmsläroverkens naturvetenskapliga föreningar. Prenumerationspris pr läsår: Kr. 1:25; pris pr häfte 20 öre. Redaktionens adress: Sveavägen 96III, Stockholm.

Vår tids ungdom besitter icke blott initiativkraft och framåtanda utan även mod och tro på framtiden. *Ett* bevis härpå utgör ovannämnda tidskrift, som startats innevarande läsår, och av vilken hittills 5 häften utkommit.

Tidskriften vill i sin mån väcka och tillgodose de ungas intresse för naturvetenskap av olika slag, den vill verka för samhörighetskänslans stärkande mellan »de naturvetenskapligt intresserade gymnasisterna i de olika landsändarna». Med all rätt framhåller den det stora värdet av studieresor och visar åtskilliga bilder från sådana.

I varje nummer innehåller tidskriften under rubriken *Föreningsnytt* notiser från naturvetenskapliga föreningar vid olika läroverk. Under rubriken *Aktuellt* förekomma diskussionsinlägg i växlande frågor: Är gymnasiet ändamålsenligt? Tobak, sprit och dans.

Huvudinnehållet utgöres av uppsatser från skilda områden inom tidskriftens verksamhetsfält, enkelt och ledigt skrivna samt med omväxlande och intresseväckande innehåll. Här några exempel. Några ord om plankton, några egendomliga svenska insekter, frukten och tänderna, framställning av konstis, ljudproduktionsapparater, kraftbegreppet, fluorescens och fosforescens, moderna föreställningar om atomernas byggnad, alkaloiderna, alunskifferns användning förr och nu, organiskt liv på Jupiters månar?, reseintryck från Västindien.

Tidskriften har en positiv uppgift att fylla; dess början är löftesrik. Den förtjänar därför stöd och uppmuntran såväl från läroverkens som från alla naturvetenskapligt intresserade ungdomsvänners sida.

J. S. Hedström.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

513) *Lös ekvationen*

$$4 \operatorname{tg} x + 3 \cos x = 5.$$

A. H. P.

514) *Halvcirkelbågen ABCD delas i tre lika delar av punkterna B och C. Att konstruera punkten P på bågen AB, Q på BC och R på CD så, att polygonen APBQCRD vid rotation omkring AD alstrar en kropp med största möjliga volym.* *X.*

515) *Att konstruera en korda AB i en given cirkel så, att följande figur kan uppritas. Om S betecknar det större av de två segment, som AB bestämmer, skola först två sinsemellan lika, med S likformiga segment (S_1 och S_2) placeras så, att deras kordor AD och EB utgöra delar av AB och deras bågar tangera varandra. Alla tre ligga på samma sida om AB. Uppritas sedan på DE som korda ett fjärde segment, likformigt med de föregående, men beläget åt motsatt håll, kommer dess båge att tangera den givna cirkeln.* *X.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

516) I en triangel äro två höjder lika stora. På den tredje höjden som diameter uppritas en cirkel. Denna befinnes tangera de båda förstnämnda höjderna. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: 41°,81; 41°,81; 96°,38.

517) Beräkna vinklarna i en likbent triangel, där den omskrivna cirkeln a) delar två av triangelns höjder mitt itu, b) tangerar två av triangelns höjder.

Svar: a) 35°,26; 35°,26; 109°,47.

b) 30°; 30°; 120°.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 516—521 äro insända av C. E. B., uppg. 522—528 av apotekare P. E. Lundin, Västervik, uppg. 529—530 av prof. C. A. Mebius.

518) I en triangel tangerar den omskrivna cirkeln en av höjderna och skär en annan mitt itu. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: $24°{,}_{10}$; $41°{,}_{80}$; $114°{,}_{10}$.

519) I en triangel ABC är $BC = 10$ cm och höjden mot $AC = 6$ cm. På denna höjd som diameter uppritas en cirkel. Beräkna triangelns vinklar, om denna cirkel tangerar a) höjden mot BC, b) medianen från A, c) bissektrisen till A.

Svar: a) $A = 104°{,}_{04}$; $B = 39°{,}_{09}$; $C = 36°{,}_{87}$.
b) $A = 102°{,}_{72}$; $B = 40°{,}_{41}$; $C = 36°{,}_{87}$.
c) $A = 103°{,}_{66}$; $B = 39°{,}_{47}$; $C = 36°{,}_{87}$.

520) Konstruera en cirkel, som tangerar två givna cirklar samt en av cirklarnas gemensamma yttre tangenter.

521) Lös ekvationen

$$tg\,\frac{v}{2} + 2\cot 2v = 0.$$

Svar: $\pm\, 51°{,}_{83} + n \,.\, 360°$.

522) Lös ekvationen

$$\log 3 + \log (2 + 7^x) = \log 189 - x \log 7.$$

Svar: $x = 1$.

523) Lös ekvationen

$$2tg\,x + \frac{1}{tg\,2x} + \frac{1}{\sin 2x} = 3.$$

Svar: $x = 26°{,}_{56} + \text{n.}\, 180°$.

524) $ABCD$ är en kvadrat. Bestäm läget av en punkt P på AC så, att summan av PA, PB och PD är ett minimum.

Svar: $\sphericalangle ABP = 15°$.

525) Från en hamn avgå samtidigt en seglare med 5 knops fart och en ångare med 20 knops fart i rakt ostlig riktning. När synes avståndet mellan båtarna störst från en ort, belägen i rätt nordlig riktning på 10 sjömils avstånd från hamnen?

Svar: Efter en timme.

526) En halvcirkels diameter är AB och medelpunkt O. Genom A och O dragas parallella linjer, som råka periferien i P och Q resp. Bestäm $\sphericalangle PAO$ så, att den yta, som begränsas av linjerna PA, AO och OQ samt bågen PQ blir ett maximum.

Svar: 60°.

527) ABC är en vid A rätvinklig triangel. En transversal genom C skär AB i P och medianen från B i Q. För vilket läge av P blir ytan av $\triangle APQ$ ett maximum?

Svar: $AP : AB = 2 - \sqrt{2}$.

528) På kateterna i en egyptisk triangel uppritas kvadrater utåt. Figuren roterar ett varv kring hypotenusan. Beräkna rotationskroppens volym.

Svar: 137π.

529) Uppdela i två faktorer

$$2^{4n+2}+1.$$

Svar: $(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)$.

530) Uppdela i tre faktorer

$$3^{3(2n-1)}+1.$$

Svar: $(3^{2n-1}+1)(3^{2n-1}+3^n+1)(3^{2n-1}-3^n+1)$.

531) Giv ekvationen för en cirkel, som går genom linjens $x+y=2$ skärningspunkter med cirkeln $x^2+y^2=16$ och därjämte tangerar linjen $x-y+8=0$.

Svar: $x^2+y^2+4x+4y=24$ och $x^2+y^2-8x-8y=0$.

532) Normalen i parameterns ändpunkt till parabeln $y^2=4x$ är även normal till kurvan $x^2+2ny^2=2$. Beräkna härav värdet på n.

Svar: $n_1=-1$; $n_2=\frac{1}{14}$.

533) I en triangel är $h_a=4$ cm, $h_b=12$ cm och $m_c=2\sqrt{10}$ cm. Beräkna a och b.

Svar: a och b äro resp. 15 cm och 5 cm eller 12 cm och 4 cm.

534) Under vilken vinkel skär den kring en liksidig triangel omskrivna cirkeln en av de vidskrivna cirklarna?

Svar: 75°,52.

535) I en triangel är en bissektris lika med och vinkelrät mot en median. Bestäm triangelns vinklar.

Svar: 29°,75; 67°,38; 82°,87.

Lösningar till uppg. 461—463.[1]

461) *AB och AC äro två lika långa kordor i en cirkel. Drag en tangent till cirkeln så, att den del av tangenten, som begränsas av BA:s och AC:s förlängningar delas mitt itu i tangeringspunkten.*

X.

Kordornas mittpunkter äro M och N. MN skär bågen AC i P. Tangenten i P är den sökta. Den skär BA:s förlängning i D

[1] Tillägg till föreg. häfte: Signaturen *L.* hade insänt lösningar till uppg. 448—450.

och AC:s i E. Utdrag CA till F så, att $AF = AD$; $\therefore FD \parallel MP$. Sättes nu $AB = AC = 2a$, $CE = y$, $AD = AF = x$, $PD = s$ och $PE = t$, så fås

$$\frac{s}{t} = \frac{x+a}{y+a}, \quad \therefore \frac{s^2}{t^2} = \frac{x(x+2a)+a^2}{y(y+2a)+a^2} = \frac{s^2+a^2}{t^2+a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1, \text{ d. v. s. } s = t.$$

L.

462) *Drages en parameter i en viss ellips, delas ellipsens yta i förhållandet 1 : 3. Beräkna excentriciteten på 0,001 när.* *X.*

Medelpunktsvinkeln till den mot parametern svarande kordan i den omskrivna cirkeln sättes $= \alpha$ eller x radianer. Då fås

$$\frac{b}{a}\left(\frac{\alpha}{360} \cdot \pi a^2 - \frac{a^2}{2} \cdot \sin \alpha\right) = \frac{\pi ab}{4}$$

$$\text{eller } x - \frac{\pi}{2} = \sin x \text{ eller } \frac{\pi}{180}(\alpha - 90°) = \sin \alpha \; (1).$$

Sökes grafiskt skärningen mellan $y = x - \frac{\pi}{2}$ och $y = \sin x$, erhålles approx. $x = \frac{133\pi}{180}$ eller $\alpha = 133°$. Vid prövning i (1) under formen $\log \sin \alpha = 8{,}2419 + \log(\alpha - 90°)$ fås $\alpha = 132°{,}35$. Alltså $e = \cos \frac{\alpha}{2} = 0{,}404$.

L. Även löst av *H. Jansson.*

463) *Cirkelbågarna AMB och ANB ligga på samma sida om AB. Cirkeln C tangerar båda. Beräkna den största vinkel, under vilken C synes från någon punkt på AB, då den större bågens gradtal är α och den mindres 360° — α.* *X.*

Kalla AB:s mittpunkt D och den större bågens medelpunkt O. Tag D till origo i ett koordinatsystem med x-axeln utefter AB. Orten för C är då, om $AB = 2p$, $OD = q$ och $OA = r$, ellipsen $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$. Hur C än ligger, synes cirkeln under största vinkel från fotpunkten av den perpendikel, som från C fälles mot AB. Låt denna vinkel vara φ, så fås, emedan brännpunktsradien $OC = r - \frac{qy}{r}$, $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{q}{r}$ d. v. s. konst. Alltså $\varphi_{max} = \alpha - 180°$.

L. Även löst av *H. Jansson.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna V. T. 1932.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. Dela talet 25 i två delar så, att summan av delarnas tredje digniteter blir 5 425.
2. En liksidig triangel och en cirkel ha lika stora ytor. Triangelns omkrets är 1 meter. Huru stor är cirkelns omkrets?
3. En gosses arv å 17 350 kronor är placerat så, att vid varje års slut 5 % ränta tillföres detsamma. Samtidigt uttagas därur årligen 1 200 kronor för uppfostringsändamål. Huru mycket återstår av arvet vid 9:e årets början?
4. I en likbent triangel dragas medianerna mot de båda lika sidorna. Huru stora skola triangelns vinklar vara, för att dessa medianer skola vara vinkelräta mot varandra?
5. Bestäm det exakta värdet av förhållandet mellan de båda periodiska decimalbråken

$$0{,}045\,45\,45\ldots \quad \text{och} \quad 0{,}054\,054\,054\ldots$$

6. I en triangel är en sida 10 cm, de båda andra sidornas summa 26 cm och den i triangeln inskrivna cirkelns radie 2 cm. Huru stora äro triangelns sidor?
7. I en triangel ABC är sidan AC 109 m, sidan AB 97 m och vinkeln C 32°,9. Huru många dylika trianglar finnas, och huru stor är den tredje sidan?
8. I en given rätvinklig triangel, i vilken en vinkel är 30°, har man inskrivit en likbent rätvinklig triangel så, att den räta vinkelns spets faller på den givna triangelns hypotenusa. Vidare äro de båda trianglarnas hypotenusor parallella. Beräkna förhållandet mellan de båda trianglarnas ytor.

Resultat: 1. 8 och 17. 2. 0,7777 m. 3. 14 180 kr. 4. 71°,56; 71°,56; 36°,88. 5. $\frac{37}{44}$. 6. 9 cm, 10 cm och 17 cm. 7. Två trianglar finnas; 14,67 m eller 168,4 m. 8. $\frac{7\sqrt{3}+12}{6} = 4{,}021$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. I en triangel ABC är sidan AB 96 cm, vinkeln A 30° samt den kring triangeln omskrivna cirkelns radie 50 cm. Huru stora äro sidorna AC och BC?

2. Från punkten $(0, a)$ dragas tangenter till ellipsen

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

De med dessa tangenter parallella diametrarna i ellipsen äro konjugatdiametrar. Beräkna ellipsens excentricitet.

3. Lös ekvationen

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x - \operatorname{tg}^7 x + \ldots\ldots = \frac{1}{3}.$$

4. Tre tal x, y, z bilda i nu nämnd ordning geometrisk serie. Skrivas de däremot i ordningen y, x, z, så bilda de aritmetisk serie. Vidare är summan av de tre talens kvadrater 21. Vilka äro talen?

5. ABC är en liksidig triangel med mittpunkten O och sidan a. En godtycklig rät linje genom O skär AC i punkten E och BC i punkten D. Visa, att

$$\frac{1}{CD} + \frac{1}{CE} = \frac{3}{a}.$$

6. I en given cirkel med medelpunkten O och radien r skall man bestämma en sektor AOB (med bågen AB mindre än cirkelns halva omkrets) så, att totala ytan av den kropp, som erhålles, då sektorn roterar ett varv kring den med kordan AB parallella diametern, blir så stor som möjligt. Huru stor blir sektorns medelpunktsvinkel och rotationskroppens volym?

7. En triangel bildas av y-axeln och två tangenter till parabeln $y^2 = 2px$. Visa, att denna triangels höjdlinjer träffas på parabelns styrlinje.

8. En pyramid har till bas en rektangel $ABCD$. Dess spets O ligger rakt över basytans mittpunkt. Genom kantlinjen AB lägges ett plan, som går genom mittpunkten av kantlinjen OC. Detta plan delar pyramiden i tvenne delar. Beräkna förhållandet mellan dessa delars volymer.

9. Inskriv i en given cirkel en fyrhörning, i vilken de båda diagonalerna ha givna längder och dessutom förhållandet mellan två närbelägna sidor är lika med ett givet förhållande.

Resultat: **1.** $BC = 50$ cm; $AC = 48\sqrt{3} \pm 14$, d. v. s. 97,14 cm eller 69,14 cm. **2.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.** $20°{,}90 + n \cdot 180°$. **4.** 1, −2, 4; −1, 2, −4; alla $= \sqrt{7}$ eller $= -\sqrt{7}$. **6.** $126°{,}87$; $\frac{8\pi\sqrt{5}}{15} \cdot r^3$. **8.** 3 : 5.

Uppgifter i fysik.

1. En glatt, horisontell egg B är parallell med en plan, sträv, vertikal vägg och är belägen på 4 dm avstånd från denna. Över eggen ligger en rak, homogen jämntjock stav, längd 12,5 dm, så att dess nedre ände A stöder mot väggen. Vid det lägsta läge, som punkten A vid jämvikt kan intaga, är AB 5 dm. Sök friktionskoefficienten mellan stången och väggen.

2. En bleckburk, fylld med skrot och sand, väger med innehåll 1 800 gr och är upphängd i ett långt snöre. Burken befinner sig först i vila, men mot densamma avskjutes en pistolkula, som väger 7,1 gr och har hastigheten 318 m/sek. Kulan träffar burken i horisontell riktning, borrar sig in i densamma och stannar där. Burken får därvid en hastighet i kulans riktning, som omedelbart efter det kulan fastnat uppgår till 125 cm/sek; den kommer tillika i rotation, men ej mera än att denna rörelse må försummas. Den ursprungliga rörelseenergien återfinnes efter träffen endast delvis i form av rörelseenergi. Resten har förvandlats till andra energiformer, särskilt värme. Beräkna huru mycket energi, uttryckt i gramkalorier, som omvandlats. 1 gkal $= 4{,}18 \times 10^7$ erg.

3. I en vanlig U-formad kvicksilverbarometer, där båda skänklarna ha en genomskärningsyta av 0,5 cm², är det Torricelliska tomrummets höjd 6 cm. I detta rum inkommer vid 6° C en viss mängd torr luft. Därvid sjunker kvicksilverytan i den slutna skänkeln 5 cm, utan att något kvicksilver rinner ut ur den andra skänkeln. Huru mycket väger den luftmängd, som inkommit? Luftens specifika vikt vid 0° C och 760 mm är 0,001293, dess utvidgningskoefficient 1/273.

4. En positiv lins ger av ett linjeformat föremål en reell bild, som är 4 gånger så stor som föremålet. Föremålet flyttas därefter, så att det befinner sig 10 cm längre bort från linsen. Förstoringen blir i detta senare fall endast 2. Beräkna linsens fokaldistans.

5. På en horisontell, plan glasskiva lägges en planparallell glasplatta, så att det ytterst tunna luftskikt, som bildas mellan skivan och plattan, har formen av en kil med kilvinkeln endast 2′. Om plattan uppifrån belyses med enfärgat ljus, som infaller vertikalt, synes rätt uppifrån en serie mörka linjer, som alla äro parallella med kilens kant och ligga på lika avstånd från varandra. Det infallande ljusets våglängd är 0,000589 mm. Beräkna avståndet mellan två närliggande mörka linjer.

6. En av en ledningstråd bildad cirkelformad strömbana är så monterad, att den kan bringas i rotation antingen omkring en horisontell diameter, som är vinkelrät mot det jordmagnetiska meridianplanet, eller omkring en vertikal diameter. Huru förhåller sig den i förra fallet i strömbanan genom rotationen alstrade effektiva elektromotoriska kraften till den, som alstras i strömbanan i det senare fallet, då rotationshastigheten är konstant och densamma i de båda fallen? Inklinationen är 71°,9.

7. En sluten, ogrenad strömbana bestod av ett batteri, en ampèremeter, ett reglerbart motstånd samt ett motstånd *AB*, som var exakt 2 ohm. Mellan ändarna av *AB* anordnades en grenledning, vilken innehöll ett element, en galvanometer och ett motstånd; det sammanlagda motståndet i denna grenledning var 1 000 ohm. Genom att variera det reglerbara motståndet fann man, att det existerade en inställning, för vilken galvanometern var strömlös; ampèremetern visade då 0,717 amp. Sedan det reglerbara motståndet därefter åter ändrats, gjorde galvanometern ett utslag på 33,6 skaldelar, och genom att observera, åt vilket håll utslaget skedde, kunde man sluta sig till att spänningen mellan ändpunkterna av motståndet *AB* nu var större än förut. Beräkna spänningens storlek i det sista fallet. Galvanometerns känslighet var sådan, att varje skaldel motsvarade $3{,}4 \times 10^{-7}$ amp. Elementets elektromotoriska kraft kunde anses oförändrad under experimentet.

8. En seriekopplad likströmsmotors polspänning är 220 volt. Ankarets motstånd är 0,25 och magnetlindningens 0,22 ohm. Strömstyrkan i motorn är 40 amp. Beräkna den motelektromotoriska kraft, som genom rotationen induceras i ankaret.

Resultat: **1.** $\frac{1}{3}$. **2.** 85,54 gkal. **3.** 0,916 mg. **4.** 40 cm. **5.** 0,506 mm. **6.** 3,219. **7.** 1,445 volt. **8.** 201,2 volt.

Realskolexamen V. T. 1932.

Provräkning.

1. Lös ekvationssystemet

$$2x + 3y = 14$$
$$2x - 3y = \frac{1}{14}(7 - 8x + 9y).$$

2. A. var skyldig B. 1 500 kr. för varor. Då han ej kunde betala kontant, accepterade han en 4 månaders växel å 1 536 kr., som B. omedelbart lät diskontera. Huru mycket vann eller förlorade B. på att affären ordnades så, om diskont beräknades efter 7%?

3. Från en viss punkt inom en kvadrat med 10 cm sida äro räta linjer dragna till kvadratens alla hörn. Av de så uppkomna trianglarna är en liksidig. Beräkna ytan av den minsta triangeln.

4. För sin värmeledning hade en husägare ett år följande utgifter: 920 hl koks à 1,50 kr., lön till eldare 30 kr. i månaden utom under 2 sommarmånader, reparationer samt ränta och avbetalning på anläggningskostnader 240 kr. Sammanlagda volymen av de utrymmen, som skulle uppvärmas, var 2 400 m^3. Huru mycket skulle en hyresgäst betala för värme det året, om golvytorna i hans lägenhet voro: kök 2,5 m $\times$ 4 m, jungfrukammare 2,5 m $\times$ 2,5 m, matrum 5 m $\times$ 3,5 m, vardagsrum 5 m $\times$ 4,5 m, sovrum 4,2 m $\times$ 4 m och hall 4,5 m $\times$ 2,5 m? Alla rummen hade höjden 2,8 m.

5. Förenkla uttrycket

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

och beräkna därpå dess värde för $a = 5\frac{1}{2}$; $b = 3\frac{1}{3}$.

6. I en cirkelsektor AOB (O är cirkelns medelpunkt) är bågen lika lång som radien. Bågens ena ändpunkt B sammanbindes dels med A, dels med bågens mittpunkt C. Huru stor är vinkeln ABC? ($\pi = 3{,}14$).

7. I en cirkel med radien 10 cm drages en korda AB av längden 6 cm. Kordan utdrages åt B till, och på förlängningen väljes en punkt C, så belägen, att $BC = 15$ cm. Beräkna kortaste avståndet från C till cirkelperiferien.

8. I ett konformigt mätkärl är den inre diametern vid öppningen 6 cm och djupet (= konens höjd) 18 cm. Man ställer kärlet så,

att öppningen står vågrätt och häller i så mycket kvicksilver, att det lodräta avståndet från kvicksilverytan till öppningen blir 12 cm. Ovanpå kvicksilvret hälles försiktigt en vätska i sådan mängd, att det lodräta avståndet från vätskeytan till öppningen blir 3 cm. Huru stor volym av vätskan har man då hällt i? ($\pi = 3{,}14$).

Resultat: **1.** $x = 3\frac{1}{2}$; $y = 2\frac{1}{3}$. **2.** B. vann 16 öre. **3.** $25(2 - \sqrt{3}) = 6{,}7$ cm². **4.** 188,83 kr. **5.** $\frac{a+b}{a-b}$; $4\frac{1}{13}$. **6.** 14°,3. **7.** $\sqrt{415} - 10 = 10{,}372$ cm. **8.** 91,8 cm³.

Sannolikhetsräkning på empirisk grundval.

Av EDVARD GÖRANSSON.

7. Tillägg. (Forts.)

Nålproblemet. I den tidigare anförda kritiken över ett förslag till kursplan i sannolikhetsräkning (1932: 2, sid. 66 ff.) har frågan om nålproblemet uppskjutits. Enligt lektor PETRINI (sid. 83 anf. uppsats 1931: 2) kan man »redan i första ringen av det 4-åriga gymnasiet lära eleverna, hur de skola bestämma π med två decimaler genom att släppa ned en knappnål på ett streckat papper». PETRINI torde här åsyfta BUFFONS nålproblem av år 1733, vars innebörd är följande. På ett vid ett ritbräde fastsatt papper är uppritat ett rätvinkligt koordinatsystem. Parallellt med y-axeln äro linjer dragna på lika avstånd a. På brädet kastas en nål, vars längd l är $< a$. Om W är relativa frekvenstalet (sannolikheten), för att nålen träffar någon av de parallella linjerna, är $W = \frac{2}{\pi}\frac{l}{a}$.

För 50 år sedan sysslade jag och ett par kamrater med denna uppgift, därtill föranledda av ett av den tidens ungdom synnerligen uppskattat arbete av TISSANDIER [1] med titeln Vetenskapliga tidsfördriv. I överensstämmelse med anförda arbete, sid. 158, använde vi en cylindrisk stav för ändamålet. Enligt TISSANDIER böra 100 kast ge till resultat ett π-värde, som stämmer på två siffror (alltså 3,1), men detta bekräftades icke av våra försök. En bild hos TISSAN-

[1] GASTON TISSANDIER, huvudredaktör för tidskriften La nature, Vetenskapliga tidsfördriv, Visby, 1882.

Fig. 11. Nålspelet enligt Tissandier.

DIER, här återgiven som fig. 11, utvisande en del ärevördiga herrar sysselsatta med nålspelet, avhöll oss icke från att i ungdomligt övermod betrakta nålspelet (och därmed probalitetskalkylen) som humbug. TISSANDIER nämner ett fall, då nålen kastades 10 000 gånger. Resultatet blev ett π-värde lika med 3,1390.

MARKOFF [1] framhåller, att nålen förutsättes vara oändligt tunn, och omtalar, att astronomen R. WOLF under en lång följd av år, 1853—1893, var sysselsatt med försök, som åsyftade en jämförelse mellan erfarenhetssannolikhet och matematisk sannolikhet. WOLF fann värdet på π lika med 3,159 efter att ha kastat nålen 5000 gånger.

CRAMÉR uppger i sitt meranämnda arbete, att nålen skall kastas från sidan av det bräde, där man har linjerna uppritade, och samtidigt som den kastas sättas i hastig rotation kring sin tyngdpunkt, vilken skall sammanfalla med nålens mittpunkt. Försöksserier om ett eller annat tusental försök hade givit π-värden, som varierade mellan 3,14 och 3,16.

Slutligen har v. MISES visat, att det värde man får på sannolikheten i fråga blir olika under olika förutsättningar. Då v. MISES framställning av nålproblemet är av stort intresse, tillåter jag mig att referera densamma.

För att lättare komma in i det nya betraktelsesättet torde en återblick på felteorien vara lämplig. (Se årgång 13: 4, 1930, sid. 201 och 1931: 1, sid. 8). Vi erinra oss, att ytan, som begränsas av felkurvan och x-axeln, genom lämpligt val av en konstant blev lika med 1. Denna yta F, som från början tänktes vara proportionell mot summan av alla tänkbara fel, kallas *utgångskollektiv*. Sannolikheten för att ett fel ligger mellan x och $x + dx$ är lika med ydx, då y är det funktionsvärde, som svarar mot x; y kallas sannolikhetsintensitet (felintensitet).

Fig. 12 ger vid handen, att nålens läge anges genom mittpunktens koordinater (x, y) och nålens lutning ϑ mot x-

[1] A. A. MARKOFF. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin Teubner, 1912.

axeln. För detta problem har y-värdet ingen betydelse utan endast x och ϑ. Om det är fråga om $n + 1$ parallella linjer, omfattar, se fig. 13, hela området för x och ϑ i (x, ϑ)-planet en yta F, som definieras av

$$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \text{ och } 0 \leq x \leq na.$$

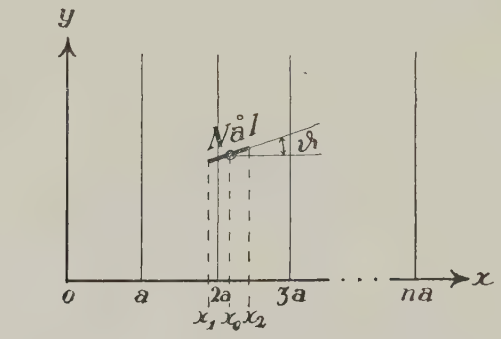


Fig. 12

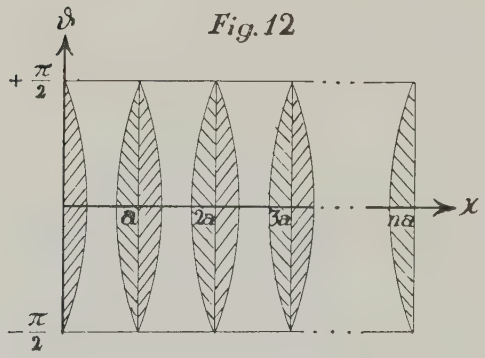


Fig. 13

För varje punkt (x, ϑ) existerar en sannolikhetsintensitet $w(x, \vartheta)$. Sannolikheten, för att vid ett kast nålens läge bestämmes genom ett mellan x och $x + dx$ liggande värde på *mittpunktens* abskissa och ett mellan ϑ och $\vartheta + d\vartheta$ beläget vinkelvärde, är $w(x\,\vartheta)\,dx\,d\vartheta$. Så snart funktionen $w(x, \vartheta)$ är känd, är utgångskollektivet fullständigt givet, varvid villkoret

$$(1) \qquad \iint_{(F)} w(x, \vartheta)\, dx\, d\vartheta = 1$$

måste vara uppfyllt. (Jfr vad som ovan anförts från felteorien).

Det nya kollektivet, *alternativet,* utgöres av alla kast, där nålen träffar någon av de parallella linjerna. Den sökta sannolikheten W utgöres av summan av alla $w\,(x, \vartheta)\, dxd\vartheta$ för de värdepar (x, ϑ), som motsvara de fall, då nålen råkar någon av linjerna, d. v. s.

$$(2) \qquad W = \iint_{(F_1)} w(x, \vartheta)\, dx\, d\vartheta,$$

varvid F_1 är den yta i (x, ϑ)-planet som motsvarar nyssnämnda värdepar.

Tänka vi på vänstra halvan av nålen (se fig. 13), utgör den yta, som begränsas av $x = o$ och sinusoidbågen $x = \frac{l}{2} \cos \vartheta$ en del av ytan F_1. Alla punkter inom nämnda ytdel uppfylla villkoret $x \leq \frac{l}{2} \cos \vartheta$. Ökar man x med a, $2a$, $3a, \ldots (n-1)a$, utan att ändra ϑ, så erhåller man x-värden, som svara mot nålens skärning av 2:a, 3:e, 4:e ... n:te tvärlinjen. För den del av nålen, som ligger till höger om mittpunkten, motsvaras möjligheten att skära någon av de parallella linjerna av de ytor, som utgöra spegelbilder av de förra. Man har alltså $2n$ segment, som tillsammans bilda den yta F_1, över vilken integralen (2) skall utsträckas.

För att kunna beräkna sannolikheten W enligt (2) måste man känna funktionen $w\,(x, \vartheta)$, vilken beror av det sätt, varpå nålen kastas och kan utrönas experimentellt. Enligt likamöjlighetsprincipen antagas utan vidare alla kast vara likvärdiga, d. v. s. att w är konstant. Enligt fig. 13 blir under denna förutsättning integralen i formeln (1) lika med $w \,.\, F = w \,.\, na\pi = 1$ och alltså $w = \frac{1}{na\pi}$.

Formeln (2) övergår då i

$$W = w \cdot 2n \int_0^{\frac{l}{2}} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \, d\vartheta = w \cdot 2n \frac{l}{2} \cdot 2$$

och alltså

$$W = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{a}. \tag{3}$$

Men nålens läge i förhållande till de parallella linjerna kan även angivas genom abskissorna x_1 och x_2 för dess ändpunk-

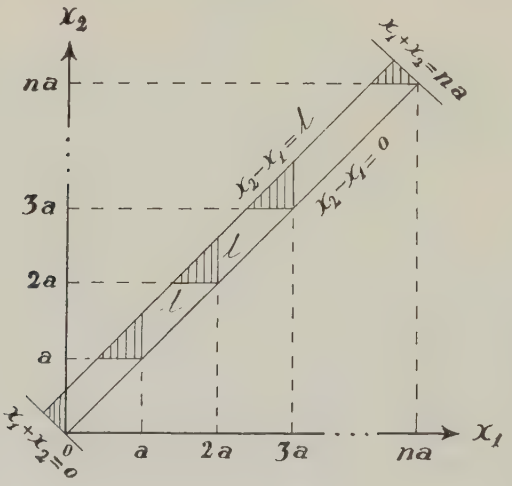


Fig. 14

ter, se fig. 12. Vi antaga x_1 vara den mindre koordinaten, alltså $x_1 \leq x_2$ och $x_2 - x_1 \leq l$. I det rätvinkliga koordinatsystemet (x_1, x_2), se fig. 14, uppritas de båda linjerna $x_2 = x_1$ och $x_2 - x_1 = l$. I överensstämmelse med det föregående antagas de yttersta lägena för nålens mittpunkt vara $\frac{x_1 + x_2}{2} = 0$ och $\frac{x_1 + x_2}{2} = na$. Enligt figuren är ytan F begränsad av linjerna $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 2na$, $x_2 = x_1$ och $x_2 - x_1 = l$.

Vad ytan F_1 beträffar, består den dels av den lilla triangeln där x_1 är negativ, dels av den, som begränsas av linjen $x_1 + x_2 = 2na$, samt vidare av en följd av dubbeltrianglar. Den första av dubbeltrianglarna blir övertäckt om $x_1 \leq a$, $x_2 \geq a$ o. s. v. Ytan $F = \frac{l}{\sqrt{2}} \cdot na\sqrt{2} = nal$ och ytan $F_1 = 2n \cdot \frac{l^2}{4} = n \cdot \frac{l^2}{2}$. Om vi även i detta fall antaga att w, d. v. s. $w(x_1, x_2)$, är konstant, blir enligt (1) $w = \frac{1}{nal}$ och alltså enligt (2)

$$W = \frac{1}{nal} \cdot \frac{nl^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{a}. \tag{4}$$

Av det anförda framgår, att med användning av likamöjlighetsantagandet kan $\frac{2l}{Wa}$ bli lika med π enligt (3) eller ock lika med 4 enligt (4). Vid val av andra utgångskollektiv kan man få andra värden på ifrågavarande uttryck. Likamöjlighetsprincipen är icke i stånd att förklara, att förhållandet mellan antalet gynnsamma fall och antalet lika möjliga fall, d. v. s. $\frac{F_1}{F}$, kan antaga olika värden.

I professor Cramérs lärobok återfinnes (sid. 95) ett likartat problem, nämligen sannolikheten för att en på måfå i en cirkel dragen korda blir längre än sidan i den inskrivna liksidiga triangeln. Även detta problem ger en mängd lösningar, av vilka Cramér anger tre. Då denna omständighet är oförenlig med det aprioriska antagandet om lika möjlighet att i en cirkel draga kordor av olika längd, har uppgiften av Poincaré kallats för bertrandska paradoxen. Nålproblemet jämte en stor klass av uppgifter, som behandlas i litteraturen, ge olika värden, alltefter som man vid olika val av variabler antager sannolikhetsintensiteten vara konstant. Alla dessa uppgifter bli paradoxala från den klassiska sannolikhetsteoriens synpunkt. Men därmed är ett nytt bevis lämnat på olämpligheten av att uppbygga sannolikhetsräkningen på antagandet

om gynnsamma och lika möjliga fall. I den orienterande framställning, som lämnades i den första av dessa uppsatser (1929/30, sid. 202), valdes därför en uppgift, där sannolikhetsintensiteten var föränderlig och proportionell mot $e^{-h^2x^2}$.

Därmed torde lektor PETRINIS knappnålsproblem vara avfört från första ringens kurs i matematik. I själva verket är problemställningen alldeles oriktig. En lärjunge i första ringen av gymnasium kan omöjligen föreställa sig, att talet π har något med ifrågavarande försök att göra. Försöket bör tvärtom anordnas i syfte att pröva riktigheten av det apriori-ska sannolikhetsantagandet, en sak, som på detta stadium alldeles överstiger lärjungens horisont.

Till frågan om lärarutbildningen. Lektor PETRINI uttalar i den anförda uppsatsen, att det för att undervisa i den lilla kurs i sannolikhetsräkning, som inkommit på skolprogrammet, inte fordras djupare kunskaper, än att läraren lätt kan sätta sig in i vad som behövs utan större ansträgning. Detta påstående synes vara vederlagt av vad PETRINI anför om att lärjungen bör bibringas »en mer matematiskt preciserad form av de stora talens lag», vartill kommer mångfalden av specialuppgifter för intresserade lärjungar. Det finns nog ingen anledning att här frångå den goda regeln att läraren behöver kunna åtskilligt mer än vad han har att inpränta i eleverna.

Från sannolikhetskalkylens historia bör läraren i matematik ha inhämtat, att denna gren av matematiken »tidigare varit offer för alltför litet kritiska matematiker och på sistone jämväl offer för kanske alltför kritiska filosofer». Läraren bör veta, att en teori för sannolikhetskalkyl, som grundas på den laplaceska definitionen, så gott som uteslutande är tillämplig på hasardspelens massfenomen, men att den kommer till korta, när den skall tillämpas på flertalet andra företeelser.[1] Det har ock i det föregående påvisats, att

[1] Professor J. F. LINDERS installationsföreläsning, Nordisk statistisk tidskrift, 1932.

läraren bör vara i stånd att kritiskt granska innehållet i en del mer eller mindre populära läroböcker i ämnet (t. ex. i fråga om nålproblemet). Men framförallt bör läraren sätta sig in i det moderna sannolikhetsbegreppet, som först med v. MISES har slagit igenom.

I sitt förut citerade arbete *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* har v. MISES gått in för, att sannolikhetsräkningen bör behandlas, som varje annan gren av naturvetenskaperna, d. v. s. empiriskt. För att få ögonen öppna för vad som rör sig inom denna del av vetenskapen även från filosofernas sida bör varje lärare i ämnet studera detta intresseväckande arbete, vilket är synnerligen lättläst (det innehåller knappast en enda matematisk formel). På sista sidorna finnes en sammanfattning av bokens innehåll i form av 10 teser.

Först efter studiet av detta arbete bör läsaren taga sig en funderare över vad skolkursen i sannolikhetsräkning bör omfatta och huru en lärobok i ämnet bör vara beskaffad.

I den tidigare omnämnda läroboken, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* etc., har v. MISES byggt upp en vetenskaplig framställning på de grundantaganden, som i det föregående omnämnts, d. v. s. förefintligheten av ett kollektiv med vissa egenskaper, nämligen att kunna fortsättas obegränsat och vara regellöst (principen om omöjligheten av ett spelsystem). Arbetet omfattar fyra huvudkapitel: 1) elementen av sannolikhetsräkningen, 2) sannolikhetsräkningens gränsvärdessatser, 3) tillämpning på statistik och felteori, 4) grunder för den fysikaliska statistiken. De matematiska förutsättningarna för studiet av arbetet äro de, som i allmänhet innefattas i inledande föreläsningar i matematik vid universitetet och tekniska högskolor. Framställningssättet är den borne pedagogens, som också fasthåller vid nämnda förutsättningar. Därpå har redan anförts som exempel ett sätt för beräkning av en viss integral (1932: 1, sid. 1), vilket i enkelhet ej lämnar något övrigt att önska. I detta sammanhang bör nämnas den i bokens andra huvuddel förekommande härledning av

formler för gränsövergångar, vilka äro kända under namnen LAPLACES, POISSONS och STIRLINGS formler. I andra läroböcker får läsaren oftast åtnöjas med citat av dessa formler med eller utan hänvisning till andra källor.

Även detta arbete anbefalles på det livligaste. Någon lämpligare lärobok för läraren finnes icke. Dess vidlyftighet och pris (omkring 45 kronor med nuvarande valutaförhållanden) torde emellertid lägga hinder i vägen för ett allmännare studium av detsamma.

Givetvis komma v. Mises båda nyssnämnda huvudprinciper samt definitionen på sannolikhet såsom limes för ett relativt frekvenstal att bli föremål för delade meningar bland matematici, filosofer och statistici. En styrka för hållbarheten av de nya principerna är emellertid, att det föreligger en på desamma vetenskapligt uppbyggd lärobok i ämnet jämte tillämpningar. Erfarenheten har givit vid handen, att någon motsvarande lärobyggnad på grundval av den klassiska sannolikhetsdefinitionen torde vara omöjlig att åstadkomma.

Den framställning av sannolikhetskalkylen, som återfinnes i v. MISES lärobok av år 1931, är uppbyggd på principer, som offentliggjorts i en serie publikationer alltsedan 1918. På sista tiden ha andra författare givit åt v. MISES definition på sannolikhet, ytterligare skärpa, på det att sannolikhetsteorin må erhålla en klar och motsägelselös byggnad och därmed bli skickad att utgöra grundval för den moderna teoretiska fysiken.[1] Visserligen bör läraren vara förtrogen med dessa saker, men på skolstadiet hava de intet att skaffa, så mycket mindre som de delar av fysiken, där statistiska metoden i egentlig mening kommer till användning, knappast tillhöra skolkursen. Såsom förut antytts, får man nöja sig med att införa begreppet statistiskt frekvenstal. Fysiska och kemiska undersökningar leda nämligen till talserier, vilka ge upphov till frekvenstal av enahanda natur som statistiska.

[1] ERICH KAMKE, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie, Leipzig, Hirzel, 1932.

Inom den moderna fysiken har ock ett annat område av matematiken vunnit tillämpning, vilket icke heller kan upptagas å skolprogrammet. Tack vare HILBERTS axiomatik [1] fick den icke-euklideiska geometrien i tre eller flera dimensioner en naturlig grundval.[2] För skolbruk ha utarbetats läroböcker i geometri, vilka grunda sig på axiomatiken, exempelvis av den italienske matematikern VERONESE [3] och av amerikanen J. B. HALSTED,[4] lärjunge till HILBERT. Även lektor PETRINI har lämnat ett förslag till en reform av geometriundervisningen.[5] Man behöver ej läsa många satser i dessa arbeten för att finna, att framställningen är allt för abstrakt för att kunna användas på det stadium, för vilket den är avsedd. Fysikläraren behöver emellertid äga kännedom om ovannämnda generalisation av rumsbegreppet för att kunna erhålla en inblick i relativitetsteorin

Av det anförda framgår, att den teoretiska fysikens krav på matematiska förutsättningar beträffande sannolikhetsräkning och geometri äro av den art, att de icke kunna upptagas på skolans undervisningsprogram. Ifrågavarande speciella områden av den teoretiska fysiken hava ännu icke på långt när nått den stadga eller vunnit den lättfattliga utformning, att de kunna bli föremål för behandling inom de allmänna läroverken. Som belägg härför må anföras följande uttalande av v. MISES: »Die theoretische Physik — — — — befindet sich seit mehreren Jahrzehnten in einem Zustand ungewöhnlich starker, schöpferischer Gärung, der wenig Neigung zur Vertiefung der Grundlagen oder zur Systematisierung der Ergebnisse aufkommen lässt».

[1] Grundlagen der Geometrie, 2:a uppl., Leipzig, Teubner, 1903.

[2] Nyare riktlinjer för matematikundervisningen, bilaga till årsredogörelsen för Högre reallläroverket å Norrmalm, läsåret 1906/1907, sid. 50 ff.

[3] Elementi di geometria, 9:e uppl., Verona 1907.

[4] Rational geometry, New-York (Wiley and Sons), London (Chapman and Hall), 1904.

[5] Plan elementargeometri I och II, bilaga till årsredogörelsen för Högre allmänna läroverket i Växjö läsåret 1901/1902. För arbetet är utförligt redogjort i den i not 2 omnämnda bilagan.

Om införandet av logaritmer.

Av GUSTAV HÖSSJER.

Sedan lång tid tillbaka har man i elementarmatematiken brukat grunda läran om logaritmer på potensbegreppet, varvid potenser definieras med tillhjälp av högre rötter. Denna lärogång är formellt enkel och elegant. Men man kan likväl göra mycket allvarliga invändningar mot densamma.

Med användning av de matematiska resurser och den tid, man på ifrågavarande stadium kan förfoga över, kan ingen enda icke trivial logaritm beräknas enligt definitionen med en noggrannhet, som de vanliga (fyrställiga) skoltabellerna ge.

Högre rötter och i synnerhet potenser med irrationell exponent äro svåra begrepp och även ur den synpunkten olämpliga som grundval för läran om logaritmer. I själva verket bli högre rötter och potenser tillgängliga för (icke rent formella) räkningar först genom logaritmer, varför ordningsföljden i lärogången borde vara omvänd. Den nämnda svårigheten gör, att läran om logaritmer kommer relativt sent. Vidare har läran om högre rötter och potenser få eller inga tillämpningar på ifrågavarande stadium; man sysslar med högre rötter huvudsakligen för att kunna definiera potenser och med potenser endast för att kunna definiera logaritmer samt bevisa lagarna för deras användning vid sifferräkning.

Slutligen är den teori för logaritmer, man kommer till, bristfällig; den handlar väsentligen endast om logaritmerna som hjälpmedel för numerisk räkning. Logaritmfunktionens derivata kan härledas endast medelst besvärliga eller

otillfredsställande metoder. Varför logaritmer med basen e äro »naturliga», framgår icke klart.

Nu finnes det en annan, mycket gammal, allmänt känd och i vetenskaplig litteratur ofta använd metod att definiera logaritmerna, nämligen som ytor mellan en hyperbelbåge och vissa räta linjer. Genom att använda denna metod kan man undgå berörda olägenheter.[1]

Man undersöker då den liksidiga hyperbeln $y = \frac{k}{x}$. Det är »naturligast» att välja $k = 1$, varvid man kommer till de naturliga logaritmerna. Man kallar ytan (se fig. 1) mellan hyperbeln, x-axeln samt abskissorna 1 och a för $\ln a$, (naturliga) logaritmen för a. Denna räknas positiv, om a är större än 1, negativ för a mellan noll och 1 samt anses vara noll för $a = 1$. Om denna yta ha eleverna en åskådlig föreställning, och en noggrann definition av vad som skall menas därmed torde vara överflödig.

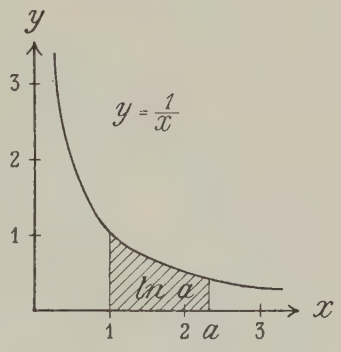


Fig. 1.

Den så definierade funktionen ln a kan för små värden på a noggrant uppskattas med ytterst enkla medel, exempelvis på följande sätt.

Ytan ln a uppdelas i smala remsor medelst linjer, parallella med y-axeln. I varje remsa ersätter man hyperbelbågen med en passande rät linje. Härtill lämpar sig bäst tangenten i bågens mittpunkt. (Den vanliga trapetsformeln ger sämre resultat, Simpsons formel är å andra sidan ej tillräckligt elementär.) Nu skriver man ytan för parallelltrapetset = mittlinjen × höjden och får så för remsan mellan abskissorna x och $x + \delta$ det approximativa uttrycket

[1] Liknande synpunkter ha förut hävdats av H. Oldenburg, denna tidskrift, årgång 12, sid. 4.

$\frac{\delta}{x+\frac{\delta}{2}}$. I de i skolorna vanligen använda tabellerna bruka även ingå tabeller över inverterade värden. Ur dessa tar man inverterade värdet av $x+\frac{\delta}{2}$, och genom lämpligt val av δ gör man multiplikationen enkel. Så får man med en remsbredd av 0,1 successivt:

$$\ln 1{,}1 = \frac{0{,}1}{1{,}05}$$

$$\ln 1{,}2 = \frac{0{,}1}{1{,}05} + \frac{0{,}1}{1{,}15}$$

$$\ln 1{,}3 = \frac{0{,}1}{1{,}05} + \frac{0{,}1}{1{,}15} + \frac{0{,}1}{1{,}25} \text{ osv.}$$

Räkningarna utföras snabbt, om de anordnas tabellariskt (se tab. 1):

Tabell 1.

a	$\ln a$	$\frac{\delta}{x+\frac{\delta}{2}}$
1,0	0,0000	0,0952
1,1	0,0952	870
1,2	0,1822	800
1,3	0,2622	741
1,4	0,3363	690
1,5	0,4053	645
1,6	0,4698	606
1,7	0,5304	571
1,8	0,5875	541
1,9	0,6416	513
2,0	0,6929	488
2,1	0,7417	465
2,2	0,7882	444
2,3	0,8326	426
2,4	0,8752	408
2,5	0,9160	392
2,6	0,9552	377
2,7	0,9929	364
2,8	1,0293	351
2,9	1,0644	339
3,0	1,0983	328
3,1	1,1311	317
3,2	1,1628	308
3,3	1,1936	299
3,4	1,2235	290
3,5	1,2525	282
3,6	1,2807	274
3,7	1,3081	267
3,8	1,3348	260
3,9	1,3608	253
4,0	1,3861	

Man inser omedelbart, att logaritmerna i tab. 1 bli något för små. Eftersom man får något för stora värden, då man i varje remsa ersätter hyperbelbågen med kordan genom dess ändpunkter, kan man elementärt, om man så vill, komma till en uppskattning av felens storleksordning. Det relativa felet i tabellen är i början c:a 0,1 % men minskas långsamt, då a växer. Vill man ha noggrannare värden, behöver man endast minska remsornas bredd, ty relativa felet avtar nära proportionellt mot kvadraten på denna bredd.

Redan i tabell 1 kan man i flera fall verifiera logaritmlagen $\ln ab = \ln a + \ln b$. Man kan också, om man så vill, låta eleverna »upptäcka» den rent experimentellt, om man

låter på analogt sätt uppskatta några lämpligt valda logaritmer.

Sedan denna lag »upptäckts» eller på annat sätt införts, kan man med användning därav och tabell 1 beräkna logaritmerna för följande hela tal (tab. 2, där sista decimalen är något osäker):

Tabell 2.

a	ln a
1	0,000
2	0,693
3	1,098
4	1,386
5	1,609
6	1,791
7	1,945
8	2,079
9	2,197
10	2,302
20	2,995
30	3,400
40	3,688
50	3,911
60	4,093
70	4,248
80	4,381
90	4,498
100	4,604

Även om man unnar sina elever nöjet att i viss grad »upptäcka» lagarna för logaritmer, måste man naturligtvis sedan bevisa dem. Detta kan göras ytterst enkelt, om man stöder sig på åskådningen. Man bevisar först följande fundamentalsats för hyperbelytan.

I. *Hyperbelytan P mellan abskissorna m och n är lika stor som hyperbelytan Q mellan abskissorna km och kn.* (Här betyda k, m och n godtyckliga positiva tal.)

Bevis (se fig. 2):

Ytan P »tänjes» k gånger i x-riktningen, genom att alla x-värden göras k gånger större. Då inses utan vidare, att P övergår i den k gånger så stora ytan R mellan abskissorna km och kn. För varje punkt på den P tillhörande hyperbelbågen har produkten xy, som förut var $= 1$, blivit k gånger så stor. För att avhjälpa detta »sammantrycka» vi R k gånger i y-riktningen genom att alla y-värden göras k gånger mindre. Då blir R k gånger mindre och övergår i ytan Q, ty nu är produkten xy hos den sammantryckta ytan åter $= 1$, och samma hyperbel som förut utgör övre gräns. Således är $P = Q$, v. s. b.

II. *Logaritmlagen för en produkt,* $\ln ab = \ln a + \ln b$.

Bevis (onödigt om endera av a eller b är $= 1$):

Ytan $\ln ab$ (se fig. 3) är algebraiska summan av hyperbelytorna mellan abskissorna 1 och a $(= \ln a)$ samt mellan

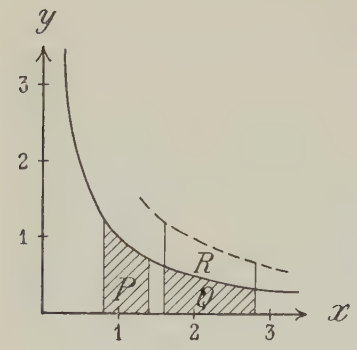


Fig. 2.

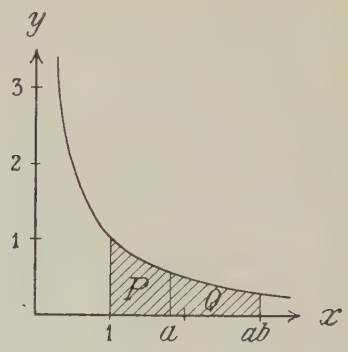


Fig. 3.

abskissorna a och ab (denna yta räknas positiv för $b > a$, negativ för $b < a$). Den sistnämnda ytan är enl. $I = \ln b$. Härav följer satsen.

III. *Logaritmlagen för en kvot,* $\ln \frac{T}{N} = \ln T - \ln N$,

får man ur II, om man sätter $ab = T$, $b = N$, varvid man får $a = \frac{T}{N}$ och $\ln a = \ln T - \ln N = \ln \frac{T}{N}$.

IV. *Logaritmlagen för en dignitet,* $\ln a^n = n . \ln a$,

erhålles likaledes med lätthet ur II. Vill man, kan man ju också här skriva upp en särskild logaritmlag för en rot.

Man övergår nu till räkning med räknesticka. Det torde vara lämpligt att låta eleverna, var för sig, tillverka logaritmiska skalor med användning av förut beräknade logaritmvärden. Sedan ett lämpligt antal exempel räknats med användning av dessa skalor som »räknestickor», förstå eleverna att använda sådana i deras vanliga form.

Först när behov inställer sig att öka noggrannheten, är det tid att diskutera frågan, hur man skall kunna anordna tabeller, lämpliga för logaritmisk räkning. Då inses lätt fördelen av att ordna så, att talet 10 får logaritmen 1. Detta återigen kan åstadkommas genom att man övergår

till en annan hyperbel $y = \frac{M}{x}$, varvid logaritmerna bli M gånger så stora som förut. Eftersom ln 10 bestämts till 2,302, blir modylen $M = 1 : 2{,}302 = 0{,}4344$ [rätta värdet 0,4343]. Multiplicerar man så värdena på ln 2 och ln 3 med denna faktor, får man 10-logaritmerna för 2 och 3, 0,3010 resp. 0,4771, vilka värden till elevernas glädje finnas i en fyrställig logaritmtabell.[1] Logaritmlagarna II—IV gälla tydligen även för de nya logaritmerna, ty de i ekvationen ingående termerna bli endast multiplicerade med faktorn M.

Först nu besitta eleverna tillräckliga hjälpmedel för att med framgång räkna med högre rötter och potenser. Om man definierar begreppet n-te rot på traditionellt sätt, får man genom omvändning av logaritmlag IV följande:

V. $$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a,$$

varigenom de kunna numeriskt beräknas. Rotlagarna bevisas lättast genom logaritmering.

Potenser definieras med hjälp av lag IV. Eftersom högra ledet har en mening för alla värden på n, såsnart a är positivt, *definieras* a^n som det tal, vars logaritm är n. log a. Då blir för ett rationellt $n = \frac{p}{q}$ relationen $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ en *bevisbar* sats.

Detsamma kommer att gälla för den viktiga satsen:

VI. $$a = 10^{\log a}.$$

Vidare kan man lätt bevisa potenslagarna.

Sats VI framhäver betydelsen av begreppet *bas* för ett logaritmsystem, ett begrepp, som förut knappast behövts. Vi få då anledning att studera allmännare logaritmsystem. Vi betrakta då logaritmer, definierade som motsvarande ytor begränsade av hyperbeln $y = \frac{k}{x}$, och definiera *basen*

[1] Felet i M utjämnar till stor del felen i tabell 1.

b för logaritmsystemet som det tal, vars logaritm blir 1. Om den gängse beteckningen på de nya logaritmerna införes, få vi ${}^b\log a = k . \ln a$, där proportionalitetsfaktorn k bestämmes genom att man gör $a = b$, då man får $k = \frac{1}{\ln a}$ och genom insättning:

VII. ${}^b\log a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\log a}{\log b}$ (eftersom logaritmerna i olika system äro proportionella.)

För b-logaritmerna gälla tydligen också de vanliga logaritmlagarna II—V. I stället för VI får man generaliseringen:

VIII. $$a = b^{{}^b\log a}.$$

Definierar man e som basen för de naturliga logaritmerna, kan man genom interpolation i tabell 1 få det noggranna värdet $e = 2{,}719$ (som endast är en enhet för stort i sista decimalen).

Till den vanliga definitionen kommer man lätt på följande sätt: man uppskattar hyperbelytan $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (se fig. 1, där a göres $= 1 + \frac{1}{n}$) som en rektangel med basen $\frac{1}{n}$ och höjden ena gången $= 1$, andra gången $= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$, varvid man i första fallet får ett för stort värde, i andra fallet ett för litet. Således får man första gången

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

och härur medelst lag IV

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1$$

samt enligt definitionen på e

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Andra gången får man $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ och härur analogt

IX. $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e.$$

Båda olikheterna tillsammans ge den vanliga definitionen

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Derivatan av funktionen $\ln x$ får man lätt genom motsvarande uppskattningar av ytan $\Delta \ln x$ medelst rektanglar med basen Δx

$$\Delta x \cdot \frac{1}{x+\Delta x} < \Delta \ln x < \Delta x \cdot \frac{1}{x}$$

och efter gränsövergång

X. $$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

samt vidare med hjälp av VII

XI. $$\frac{d({}^b\log x)}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln b}.$$

Som användning av X anför jag endast härledningen av satsen

XII. $$\frac{d(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1},$$

som är besvärlig, om n icke är ett helt positivt tal. Skriver man $y = x^n$, får man enl. definitionen ovan på potens $\ln y = n \ln x$ för alla n (och $x > 0$) och härur efter derivering med hjälp av X $\frac{dy}{dx} = n\frac{y}{x}$ och härur XII.

Temperaturstrålingens energifordeling.

En oversikt over de teoretiske synspunkter.

Av OLAF DEVIK.

(Forts. fra juniheftet).

6. *Planck löser strålingsfunksjonens problem. Kvanteprinsippet.*

I den forrige artikel er det vist hvordan alle forsök på å beregne strålingsfunksjonen for temperaturstrålingen ut fra den klassiske fysikks forestillinger hadde slått feil. Da var det som bekjent PLANCK som (1900) fremsatte den nye, dristige, men overmåde fruktbare idé: Strålingsenergien er i sit samspill med stoffets molekyler ikke ubegrenset delbar, den absorberes eller emitteres i *kvanta,* hvis störrelse er proporsjonal med frekvensen: $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$.

Planck tenker sig hulrumstrålingen representet av ekvivalente oscillatorer uten kobling. La der være n oscillatorer i frekvensområdet ν, $\nu + d\nu$, med den totale energi W. Vi antar att

n_0 har 0 kvant med energi $0\,n_0$
n_1 » 1 » » » εn_1
n_2 » 2 » » » $2\varepsilon n_2$
$\vdots$
n_p » p » » » $n\varepsilon n_p$.

Her er:

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_p$$

og den totale energi er

$$W = 0\,.\,n_0 + \varepsilon n_1 + 2\varepsilon n_2 + \ldots\ldots + n\varepsilon n_p.$$

Ifölge den statistiske mekanikk er

$$\text{lognat}\ \frac{n_0}{n_p} = p\,\frac{\varepsilon}{kT},\ \text{d. e.}\ \frac{n_p}{n_0} = e^{-\frac{p\varepsilon}{kT}}$$

(k = Boltzmanns konstant $= 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg grad^{-1})

hvorav vi suksessivt får alle n_p, derpå n, og følgelig den midlere energi pr. oscillator

$$w = \frac{W}{n}.$$

Man kan derpå lett vise, at

$$\text{lognat}\left(1 + \frac{\varepsilon}{w}\right) = \frac{\varepsilon}{kT}.$$

På den annen side gir den elektromagnetiske lysteori, for isoterm tilstandsforandring

$$\frac{w}{E_\lambda} = \frac{\lambda^4}{c},$$

altså

$$\text{lognat}\left(1 + \frac{\varepsilon c}{\lambda^4 E_\lambda}\right) = \frac{1}{kT},$$

d. e.

$$E_\lambda = \frac{\varepsilon c}{\lambda^4}\,\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1}.$$

Innsettes

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$$

så fåes

$$E_\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1}$$

eller, når K_ν innföres ($K_\nu\, d\nu = E_\lambda\, d\lambda$ og $|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2}|d\lambda|$):

$$K_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Dette er PLANCKS berömte strålingslov, som han nådde frem til i 1900 »nach einigen Wochen der angestrengtesten Arbeit meines Lebens», som han selv har sagt.

De eksperimentelle data viser sig å stemme desto bedre med den, jo omhyggeligere målingene blir utført. For *små* verdier av $\frac{T}{\nu}\left(\text{i forhold til } \frac{h}{k}\right)$ går Plancks ligning over i *Wiens* energifordelingslov:

$$K_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}; \quad u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

For store verdier av $\frac{T}{\nu}$ derimot fåes RAYLEIGH-JEANS strålingslov:

$$K_\nu = \frac{k\nu^2 T}{c^2}; \quad u = \frac{8\pi k\nu^2 T}{c^3}.$$

(Den samme formel får man også når man i Plancks formel lar $h \to 0$).

Ved differentiasjon av Plancks lov får man Wiens forskyvningslov, og ved integrasjon får man Stefan-Boltzmans lov:

$$\lambda_m T = b = \frac{ch}{4{,}9651 \,.\, k}; \quad u = \frac{48\pi h\alpha}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 = a\,T^4$$

$$\alpha = 1{,}0823$$

$$\text{d. e.} \quad a = \frac{48\pi\,\alpha k^4}{c^3 h^3}.$$

Da den utgående stråling pr. cm^2 fra en sort flate er

$s_t = \frac{ac}{4} T^4$, hvor $\frac{ac}{4} = \sigma = 5{,}6 \,.\, 10^{-5}$ erg cm^{-2} sec^{-1} grad^{-4}

er målt eksperimentelt, så blir

$$a = 7{,}4 \,.\, 10^{-15}.$$

Da videre også b er målt eksperimentelt $= 0{,}29$ cm grad, så blir

$$h = 6{,}54 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec}$$
$$k = 1{,}37 \cdot 10^{-16} \text{ erg grad}^{-1}.$$

La oss presisere det prinsipielt nye som Plancks idé bragte.

Den klassiske statistiske mekanikk antar at energien er vilkårlig delbar. I en stasjonær hulrumstråling vil da energien måtte fordeles likt på alle de frihetsgrader som forekommer. Som RAYLEIGH og JEANS viste, förer det nödvendigvis til at energiens rumtetthet vokser mot ∞ med ökende frekvens. Ganske visst avtar sannsynligheten av de stående svingninger med ökende frekvens men ikke så raskt som det öiensynlig i virkeligheten er tilfellet. *Det er altså nödvendig å opgi prinsippet om energiens jevne fordeling på frihetsgradene,* når det gjelder stråling. Istedet setter Planck en oppdeling sådan, at jo större en frekvens er, desto mere energi fordres for å gi et kvant. Vi har altså for tilstandene

$$Z_1,\ Z_2, \ldots\ldots Z_m,\ Z_n \ldots$$

at energien er

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_m < \varepsilon_n \ldots .$$

Men jo större ε_n er, *desto sjeldnere forekommer* Z_n. (Den relative hyppighet blir ifölge den statistiske mekanikk

$$W_n = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}).$$

Fölgen er, at den samlete energi blir endelig, og fordelt på frekvensene efter Plancks lov.

Vi bemerker også, at Planck egentlig innförte kvantprinsippet kun for vekselvirkningen stråling-molekyl, og han tok utrykkelig avstand fra å betrakte selve strålingen i rummet som *individualisert i kvanta.* Det syntes å være for radikalt. Det var DEBYE og fremforalt EINSTEIN som ved en rekke arbeider viste hvor fruktbar ideen om det *selvstendige strålingskvant* var.

Likesom man kan si at MAXWELL og BOLTZMANN fremsatte prinsippene for *materiens statistikk* — den statistiske

mekanikk — så förte PLANCKS og EINSTEINS arbeider til prinsippene for *energiens statistikk*.

7. *Strålingsfunksjonen utledet ved kvantestatistikk.*

I et bekjent arbeide fra 1917 viser EINSTEIN at Plancks strålingslov kan utledes rent statistisk, når man bare antar at *et strålingskvant absorberes eller emitteres* ikke som en kulebölge, men *slik at det gir en retningsbestemt impuls*, $\frac{\varepsilon}{c}$. Det kan da foregå tre slags processer mellem to indre tilstander Z_n og Z_m av et molekyl under vekselvirkning med strålingen.

For det förste kan det foregå en spontan utstråling i likhet med de radioaktive processer. Et molekyl i tilstanden Z_m mottar, idet det avgir et kvant og går over til tilstanden Z_n, impulsen $\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}$. Sannsynligheten for en slik process kan settes

(A) $$dW = A_m^n \, dt.$$

For det annet kan molekylet Z_n opta et kvant fra strålingen i rummet (rumtetthet ϱ) og optar derved impulsen $\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{c}$ samtidigt som molekylet går over i tilstanden Z_m. Sannsynligheten for denne »positive» innstråling kan settes

(B) $$dW = B_n^m \, dt.$$

Endelig kan det for det tredje skje en overgang i motsatt retning (»negativ innstråling»), hvorved Z_m mister et kvant og optar impulsen $\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}$, mens det går over i tilstanden Z_n. Sannsynligheten er

(B′) $$dW = B_m^n \, dt.$$

I gjennemsnitt må der pr. sek. finne sted like mange impulser B som A og B' tilsammen. Da den relative hyppighet av tilstanden Z_n er $W_n = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}$, så må følgelig strålingstettheten ϱ tilfredsstille ligningen

$$p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \cdot B_n^m \varrho = p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} \cdot \left(B_m^n \varrho + A_m^n\right).$$

Divideres med ϱ fåes:

$$p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \cdot B_n^m = p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} \cdot \left(B_m^n + \frac{A_m^n}{\varrho}\right).$$

Da ϱ *må* gå mot ∞ når T går mot ∞, så må man anta at

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n,$$

hvilket innsatt ovenfor förer til

$$\varrho = \frac{\frac{A_m^n}{B_m^n}}{e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1}.$$

Dette er PLANCKS lov, hvis man setter

$$\begin{cases} \frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha \nu^3 \text{ (efter Wiens forskyvningslov)} \\ \varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu \text{ (efter Bohr).} \end{cases}$$

Her er α og h universelle konstanter. For å bestemme α teoretisk måtte man kjenne A_m^n og B_m^n, altså de enkelte elementærprocessers art. Forelöbig kan α bestemmes av Rayleigh-Jeans lov, som gjelder for höie temperaturer, hvor den klassiske teori gjelder ved grensen.

EINSTEIN viser også, at strålingsimpulsene som overföres fra disse energikvanta på gassens molekyler förer til at *det innstiller sig en hastighetsfordeling som nettop er den* MAXWELLSKE.

Dette må ikke misforståes derhen, at impulsene er av samme störrelsesorden som de impulser som utveksles mellem molekylene innbyrdes ved deres stöt. (Ved en temperatur av 0° C er den sorte strålings stråletrykk bare av störrelsesorden 10^{-5} dyn/cm², sammenlignet med f. eks. det normale gasstrykk 10^6 dyn/cm².).

Den Einsteinske opfatning förte således til, at ikke bare ved absorpsjon av stråling overföres der impuls — det gav også den klassiske elektromagnetiske lysteori — men *også ved utstråling:* det er en rettet process. Strålingen er »nålestråling», strålingskvantet ankommer til atomet eller sendes ut fra atomet som retningsbestemt. Det er NEWTONS korpuskularteori som opstår i ny skikkelse.

Det skulde da ligge nær å opfatte hulrumstrålingen som en »kvantegass», hvor den termiske likevekt måtte være av statistisk art. Hvis man imidlertid forsöker å anvende den klassiske (Boltzmannske) statistikk til å beregne energifordelingen i en »kvantegass», så får man den gale strålingslov, hvor energien er skjövet over til den kortbölgete del. Det er öiensynlig en feil antagelse at de enkelte kvanta ikke virker på hverandre, og det er det man går ut fra ved den klassiske beregning av sannsynligheten av en viss fordeling. BOSE har for noen år siden vist at en ny måte å beregne sannsynligheten på (»Bose-statistikk») förer til den rigtige strålingslov.

Videre har EINSTEIN anvendt den nye statistikk også på materielle gasser. Det viser sig at den nye statistikk, som gir avkald på å numerere partiklene individuelt, förer til en noget annen fordelingslov enn den Maxwellske, men forskjellen blir desto mindre jo mer fortynnet gassen er, og nogen avvikelse fra de klassiske gasslover har man hittil ikke kunnet måle med sikkerhet. Sin störste betydning har imidlertid Bose-statistikken fått for utviklingen av en annen statistisk metode, som blev utarbeidet av FERMI. Denne Fermi-statistikk overförer PAULI-prinsippet fra atombygningens teori til en samling av partikler i en gass. Det förer til en fordelingslov som er forskjellig både fra Boses og fra Maxwells, men nærmer sig til samme resultat ved stigende fortynning. Heller ikke her kan saken eksperimentelt avgjöres for de vanlige gasser, men betrakter man elektronene i et metall som en elektrongass, så er forholdet et helt annet: Ved vanlig temperatur har iflg. Fermi-statistikken elektrongassen i et metall en helt annen fordelingslov enn den ideale gass (den

er »utartet»). Denne statistikk förer til det resultat at *elektrongassen ikke bidrar noget til metallets specifikke varme* (dens energiinnhold er uavhengig av temperaturen), mens den klassiske statistikk förer til at en elektrongass av den sedvanlig antatte tetthet (1 ledningselektron pr. atom) måtte före til en betraktelig forhöielse av den specifikke varme, nemlig fra 6 R/2 til 9 R/2 pr. Mol. — hvilket slett ikke stemmer med målingene. Fermi-statistikken har derfor gitt nöklen til et problem som lenge har voldt fysikerne vanskeligheter: elektronteorien for elektrisitetens ledning i metaller.

Hvilken inngripende betydning kvanteteorien forövrig har fått for hele atom- og molekylarfysikken vil være vel kjent. Vi har begrenset fremstillingen til å skissere det som mest direkte står i forbindelse med problemet om temperaturstrålingens energifordeling, men det vil sikkert være nok til å vise, at dette problems lösning har mer enn opfyldt de forventninger KIRCHHOFF stillet, da han i 1860 skrev:

»Die mit J bezeichnete Grösse (das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers) ist eine Funktion der Wellenlänge und der Temperatur. Es ist eine Aufgabe von hoher Wichtigkeit diese Funktion zu finden. Der experimentellen Bestimmung derselben stehen grosse Schwierigkeiten im Wege; trotzdem scheint die Hoffnung begründet, sie durch Versuche ermitteln zu können, da sie unzweifelhaft von einfacher Form ist, wie alle Funktionen es sind, die nicht von den Eigenschaften einzelner Körper abhängen, und die man bisher kennen gelernt hat». (Pogg. Ann. 109, p. 292, 1860.).

Några data ur modern geokemisk forskning.

I huvudsak efter V. M. Goldschmidt.

Av GREGORI AMINOFF.

(Forts.)

Som ett ytterligare exempel på »camouflage» mellan tvenne joner (av samma laddning) må anföras zirkonium och hafnium, vilkas radier äro

$$Zr^{+4} = 0{,}87 \text{ Å. E.}$$
$$Hf^{+4} = 0{,}86 \text{ Å. E.}$$

Hafnium ersätter som bekant zirkonium i ett stort antal zirkonium-mineral, ofta i högst avsevärd mängd.

Med likhet i jonradie sammanhänger även det egendomliga, sedan långt tillbaka kända förhållandet, att de sällsynta jordartsmetallerna aldrig ensamma uppträda i mineral, utan alltid i sällskap med andra element av samma grupp. Nedanstående tabell (efter GOLDSCHMIDT) visar tydligt den stora överensstämmelsen mellan yttriums och de trevärdiga lantanidernas jonradier

$$Gd^{+3} = 1{,}11 \text{ Å. E.}$$
$$Tb^{+3} = 1{,}09 \text{ » »}$$
$$Dy^{+3} = 1{,}07 \text{ » »}$$
$$Y^{+3} = 1.06 \text{ » »}$$
$$Ho^{+3} = 1{,}05 \text{ » »}$$
$$Er^{+3} = 1{,}04 \text{ » »}$$
$$Tu^{+3} = 1{,}04 \text{ » »}$$
$$Yb^{+3} = 1{,}00 \text{ » »}$$
$$Cp^{+3} = 0{,}99 \text{ » »}$$

I de hittills anförda exemplen ha de varandra ersättande jonerna ägt samma laddning. Ett utbyte av joner kan emellertid äga rum även i det fall att radierna äro lika eller nära lika, men laddningarna olika. Nedanstående tabell (enl. GOLDSCHMIDT) upptager några sådana fall av kristallkemisk analogi.

$Li^{+1} = 0{,}78$ Å. E.	$Na^{+1} = 0{,}98$ Å. E.
$Mg^{+2} = 0{,}78$ » »	$Ca^{+2} = 1{,}06$ » »
$Ka^{+1} = 1{,}33$ » »	$Ca^{+2} = 1{,}06$ » »
$Ba^{+2} = 1{,}43$ » »	$Y^{+3} = 1{,}06$ » »
$Sc^{+3} = 0{,}83$ » »	$Ti^{+4} = 0{,}64$ » »
$Zr^{+4} = 0{,}87$ » »	$Nb^{+5} = 0{,}69$ » »

I enlighet härmed äga kristaller av sådana salter, där i tabellen upptagna joner med samma storlek, men olika laddning, ersätta varandra, mycket nära överensstämmande gitterkonstanter, t. ex.

Ca Ti O_3	$a = 3{,}80$ Å. E.
Y Al O_3	$a = 3{,}67$ » »
Na Nb O_3	$a = 3{,}89$ » »

Särskilt F. MACHATSCHKI har utnyttjat denna erfarenhet och därpå byggt en i viss mån ny mineralkemi, vilken visat sig synnerligen fruktbärande vid diskussion av mineralkemiska problem. Grundprincipen i denna modärna mineralkemi är, att i mineral lika eller nära lika stora joner ersätta varandra oberoende av värdighet. Calcium ersättes sålunda ofta av envärdigt natrium eller trevärdigt yttrium. I det fall att exempelvis calcium ersättes av natrium uppstår givetvis en brist i negativ laddning, vilken då kompenseras av att exempelvis envärdigt fluor i samma kristall ersättes av tvåvärdigt syre.

* *
*

Ett särskilt och viktigt kapitel av den geokemiska forskningen är slutligen studiet av sådana kemiska element, vilka deltaga i det organiska livets kretslopp. Ett typiskt sådant »biofilt» grundämne är jod, vilket också gjorts till föremål för ingående studier ur geokemisk synpunkt. Den geokemiska forskningen möter här den medicinska, då ju sedan länge är känt, att ett samband mellan endemisk

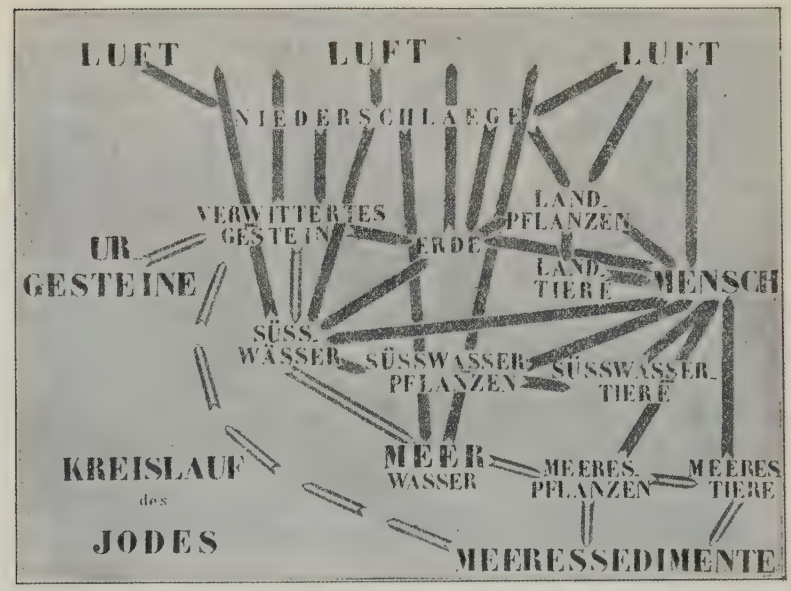


Fig. 7. Jodens kretslopp enl. v. Fellenberg. Jfr texten.

struma och kretinism och jodbrist föreligger. I senare tid har detta samband ingående studerats av bl. a. v. Fellenberg, som visat, att jodhalten i såväl bergarter, jordarter, dricksvatten, luft som näringsmedel i struma-trakter är väsentligt lägre än i områden utan endemisk struma.

I geokemiskt hänseende utmärker sig jod därigenom att det förekommer praktiskt taget överallt, i bergarter, i luft och vatten samt i organismer, dock endast i de sistnämnda i större koncentration. Till sin geokemiska karaktär torde

det vara övervägande litofilt (G. LUNDE och v. FELLENBERG 1926). I vilken form joden förekommer i bergarterna synes vara oavgjort. Halten i eruptivbergarter växlar mellan 70 och 550×10^{-6} g pr kg. (LUNDE och v. FELLENBERG). Något högre är halten i pegmatitmineral; sodalit från södra Norge visade sålunda 900×10^{-6} g pr kg. I samma ögonblick som joden genom förvittring frigöres ur bergarter, upptages den av organismerna, hos vilka den städse uppträder, ehuru i växlande mängd. Nästan hela den frigjorda jodmängden indrages härmed i det biokemiska kretsloppet. Med resterna av organismer övergår emellertid joden i sedimenten och lämnar därmed det organiska kretsloppet. Fig. 7 (enl. v. FELLENBERG 1926) ger en överblick över jodens invecklade kretslopp. Det rent geologiska kretsloppet är utmärkt genom icke fyllda pilar.

1932 års atomvikter.

Av **G. STARCK.**

Det internationella samarbetet på atomvikternas område har återupptagits, i det den internationella unionen för kemi har tillsatt en atomviktskommission med G. P. Baxter, M. Curie, O. Hönigschmid, P. Lebeau och J. R. Meyer som medlemmar. Kommissionen har i april d. å. avgivit en berättelse över atomviktsbestämningar, utförda under tiden febr.—okt. 1931, och framlagt den officiella atomviktstabellen för 1932. Denna företer två ändringar i 1931 års tabell: kryptons atomvikt ändras från 82,9 till *83,7* och xenons från 130,2 till *131,3*.

Krypton. H. E. Watson har jämfört tätheterna av en synnerligen ren krypton och syrgas med användning av mikrovåg. De båda gaserna ha samma täthet vid 301,15 resp. 787,8 mm vid 25°. Härav beräknas Kr = 83,71, i god överensstämmelse med Astons tidigare masspektrografiska värde 83,77.

Xenon. H. S. Patterson, R. Whytlaw-Gray och W. Cawood ha på liknande sätt jämfört ett av Aston erhållet, rent prov av xenon med syre och finna X = 131,26, som överensstämmer med Astons värde, X = 131,27.

För övrigt hava nybestämningar utförts av atomvikterna för kväve, kol, svavel, fluor, klor och jod, i allmänhet bekräftande äldre värden.

F. W. Aston har fortsatt sina atomviktsbestämningar genom upptagande av masspektra i förening med mikrofotometrisk intensitetsmätning av isotoplinjerna. Hans resultat under den tid, som kommissionens arbete omfattar, återfinnas i nedanstående översikt.

	Isotoper	Packn.-effekt $\times 10^4$	Atomvikt O = 16,0000
Li	6 7	+20	6,923
%	8,9 91,1	+17	
Cs	133	— 5	132,91
%	100		
B	10 11	+13,5	10,806
%	20,7 79,3	+10,0	
Ge	70 71 72 73 74 75 76 77	Mellan — 7,0	72,65
%	19,72 1,53 25,41 9,22 35,47 2,26 6,09 0,70	och — 10	
Se	74 76 77 78 80 82	— 7,3	78,96
%	0,9 9,5 8,3 24,0 48,0 9,3		
Te	125 126 128 130	— 5	128,03
%	6,6 20,9 36,1 36,4		
W	182 183 184 186	0	183,96
%	22,6 17,2 30,1 30,0		
Br	79 81	— 9,0	79,916
%	50 50	— 8,6	
Re	185 187	— 1	186,22
%	38,2 61,8		
Ru	96 98 99 100 101 102 104	— 6	101,1
%	5 12 14 22 30 17		
Os	186 187 188 189 190 192	— 1	190,31
%	1,0 0,6 13,5 17,3 25,1 42,6		

R. Mecke och W. H. J. Childs ha bestämt blandningsförhållandet mellan syreisotoperna genom mikrofotometrisk mätning av syrets bandspektrum och finna $O_{16} : O_{18} : O_{17} = (630 \pm 20) : 1 : 0{,}2$. Härav följer, att »vanligt» syre har atomvikten O = 16,0035 ± 0,0003, om O_{16} sättes = 16,0000.

Upptäckten av syrets isotoper har haft till följd, att frågan om atomviktsystemets bas måste upptagas till diskussion. Det har

från olika håll föreslagits följande baser: $H_1 = 1{,}0000$, $He_4 = 4{,}0000$, $O_{16} = 16{,}0000$ och slutligen att bibehålla den nu gällande $O = 16{,}0000$. Aston har uttalat, att det för kemien är bäst att bibehålla blandningselementet syre som bas, men att i fysiken vid behov till bas tages O_{16}. Den obetydliga och vid förnyade bestämningar säkerligen varierande differensen mellan dessa värden kommer i allmänhet icke att spela någon roll. Aston föreslår, att atomvikter, hänförda till den kemiska basen betecknas t. ex. »klorens atomvikt», till O_{16} refererade däremot »vikt av kloratomen 35» o. s. v. Kommissionen har i fråga om atomvikternas val tillkännagivit sin anslutning till Astons åsikt.

Sannolikhetsräkning i äldre svenska läroböcker.

Med anledning av uttalandet å sid. 76 i tidskriftens junihäfte innevarande årg. meddelas följande.

I »Elementerna i algebra jemte serier och logarithmer» av A. Wiemer, en lärobok, som utkom i 7 upplagor (1857—1893) och enligt Nordisk familjebok varit mycket använd i de svenska läroverken, finnes det ifrågavarande kursmomentet i samtliga upplagor jag haft tillgång till, i den 2:a på sidorna 136—140.

J. Andersson.

Även om det skulle finnas någon enstaka lärobok, som under 1800-talet upptagit ifrågavarande kursmoment, berättigar detta knappast till uttalandet: »Förr i världen innehöllo våra svenska läroböcker i algebra en del kombinatorik och sannolikhetsräkning» (årg. 12, sid. 170). Vad nu Wiemers algebra beträffar, kände jag från skoltiden endast till hans exempelsamling, »Exempel och problemer för öfning i algebra, serier och logarithmer», tredje upplagan 1864. Däri finnas inga uppgifter rörande sannolikhetsräkning. Däremot är det sant, att hans Elementerna i algebra etc. tredje upplagan, har ett kapitel »tillägg II», som enligt innehållsförteckningen handlar om »permutationer, arrangementer (variationer), kombinationer», vars avsikt är »att lämna en, om än ofullständig, anvisning på den så kallade sannolikhetsräkning». Förbiseendet å min sida har sin förklaring i den omständigheten, att exempelsamlingen icke har något motsvarande parti. Wiemers framställning inskränker sig till att omfatta 4 sidor.

Edvard Göransson.

Förslag till uppgifter för enskilt arbete i astronomi.

Av C. LUNDAHL.

(Forts.)

12. *Bestämning av riktning och belopp för solens* (skenbara) *årliga rörelse* (skenbara förflyttning bland stjärnbilderna).

Hjälpmedel: teodolit, stjärntidsur med känd *dragning*, skyddsglas.

Teodoliten uppställes som i försök 10. Då solen synes i kikaren, noteras tiden enligt stjärntidsuret. Efter ett (eller flera) dygn uppställes teodoliten på samma sätt, varefter man åter antecknar tidpunkten enligt stjärntidsuret, då solen synes i kikaren. (Eventuellt kan man låta instrumentet stå orubbat under mellantiden). Ur de sålunda erhållna tidsuppgifterna kan man lätt beräkna beloppet av solens skenbara förflyttning per stjärntidsdygn. Förflyttningens riktning framkommer under försökets gång.

Ett annat förfaringssätt är följande. Teodoliten uppställes som förut. Då solen synes i kikaren, noteras tiden enligt stjärntidsuret, och en avläsning göres på teodolitens horisontalcirkel. Instrumentet får därefter stå orubbat till påföljande observationstillfälle. Då lossas teodolitens horisontalindex, kikaren inriktas mot solen, vilken man genom långsam vridning av kikaren kring vertikalaxeln bibehåller i instrumentets synfält, ända tills uret visar samma tid som vid första observationstillfället. (Urets dragning måste dock tagas med i räkningen.) I detta ögonblick fastklämmes teodolitens horisontalindex, och en ny avläsning göres på horisontalcirkeln. Ur de två vinkelavläsningarna bestämmes lätt beloppet av solens skenbara förflyttning per stjärntidsdygn. Förflyttningens riktning framkommer även här under försökets gång.

13. *Bestämning av solens middagshöjd med ung. jämna mellantider under loppet av ett (läs-)år.* (Kan kombineras med försök 6 och 14.)

Hjälpmedel: a) sextant, fickur med känd korrektion, Svenska Almanackan, skyddsglas, eller b) sextant, gnomon, två vattenpass, skyddsglas.

a) Med användning av Svenska Almanackan uträknas på förhand vad fickuret skall visa vid sann middag den dag, en observation skall göras. I det så bestämda ögonblicket mätes solhöjden med sextanten.

b) Gnomon uppställes som i försök 8. I det ögonblick, den visar sann middag, mätes solhöjden med sextanten. (Man kan även reda sig utan gnomon på det sätt, som angivits i försök 5.)

Vilken slutsats kan dragas ur de samlade resultaten?

14. *Att på en stjärnkarta inpricka ekliptikan.* (Kan kombineneras med försök 6 och 13.)

Hjälpmedel: a) sextant, fickur med känd korrektion, stjärntidsur med känd korrektion, Svenska Almanackan, skyddsglas, eller b) sextant, gnomon, två vattenpass, stjärntidsur med känd korrektion, skyddsglas.

a) Solens läge på himlavalvet kan inprickas på en stjärnkarta, om solens deklination och rektascension äro kända. Dess deklination kan beräknas ur den i försök 3 åsyftade formeln, om solhöjden observerats. Detta senare utföres enligt försök 13 a ett antal gånger under ett år, minst en gång i månaden. Om vid varje sådant tillfälle stjärntidsuret avläses vid sann middag, kan solens rektascension bestämmas (se försök 11).

b) Solens höjd bestämmes enligt försök 13 b, varjämte man förfar på samma sätt som i a) ovan relaterats.

Rektascensionen kan i såväl a) som b) ovan bestämmas enligt försök 11 b, d. v. s. medelst fickur och Svenska Almanackan i stället för stjärntidsur.

15. *Bestämning av riktning och belopp för månens månatliga rörelse* (skenbara förflyttning bland stjärnbilderna).

Hjälpmedel: teodolit, fickur med känd *dragning*.

Försöket utföres med här angivna hjälpmedel såsom försök 12.

16. *Att på en stjärnkarta inpricka en del av månens bana på himlavalvet.* (Kan eventuellt kombineras med försök 17.)

Hjälpmedel: teodolit, fickur med känd korrektion, stjärntidsur med känd korrektion, Svenska Almanackan.

Borgerliga tiden för månens kulmination anges i Svenska Almanackan. Månens kulminationshöjd mätes med teodoliten upprepade gånger under någon tid (minst två ggr i veckan, helst oftare) med ung. jämna mellanrum, varefter månens deklination vid dessa tillfällen kan beräknas. (Svenska Almanackans uppgift

om månens deklination kan användas som kontroll.) Vid samma tillfällen bestämmes månens rektascension som i försök 11 eller 14.

I stället för att göra ovannämnda observationer under en månad eller del därav kan man utsträcka dem över ett (läs-)år, göra *en* sådan i varje månad vid tillfällen, då månen har ung. samma fas. Väljer man härtill fullmånen, kan detta försök kombineras med försök 17.

Vilken slutsats kan dragas ur de samlade resultaten?

17. *Bestämning av fullmånens största höjd under varje månad av ett (läs-)år.* (Kan eventuellt kombineras med försök 16.)

Hjälpmedel: teodolit, fickur med känd korrektion, Svenska Almanackan.

Borgerliga tiden för månens kulmination anges i Svenska Almanackan. Fullmånens kulminationshöjd uppmätes med teodoliten.

Jämför de erhållna värdena på månens kulminationshöjd med solens middagshöjd respektive dagar och förklara jämförelseresultatet! (Solens middagshöjd kan i detta försök lämpligen beräknas ur uppgifterna i Svenska Almanackan om solens deklination och ortens polhöjd.)

18. *Att på en stjärnkarta inpricka en del av Mars' eller Jupiters bana på himlavalvet* (om möjligt en slinga).

Hjälpmedel: teodolit, fickur med känd korrektion, stjärntidsur med känd korrektion, Svenska Almanackan.

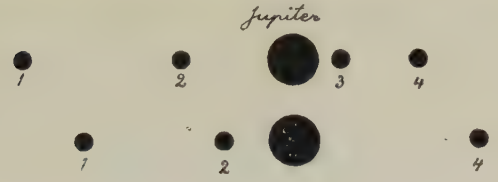
Borgerliga tiden för planeternas kulmination angives i Svenska Almanackan för vissa dagar i varje månad. Försöket utföres på samma sätt som försök 16.

Vilken slutsats kan dragas ur de samlade resultaten?

19. *Utför observationer på och teckna skisser över Jupiters fyra största månars förflyttningar* (om möjligt) *dag för dag under någon tid.*

Hjälpmedel: astronomisk tub (eventuellt prismakikare).

Skisserna kunna lämpligen utföras så som i nedanstående figur 3.



Figur 3.

I det undre läget antages månen n:o 3 ha förflyttat sig så, att den ligger bakom planeten i dennas skugga.

20. *Iakttag nedannämnda objekt.*

Hjälpmedel: astronomisk tub (eventuellt prismakikare för vissa av objekten).

Jupiter, Saturnus, Venus, Mars, en solfläck (genom projiciering på skärm), ε Lyræ, ζ Ursæ Majoris, ringnebulosan i Lyran, Andromeda-nebulosan, Orion-nebulosan, Herkules-stjärnhopen, Præsepe, Plejaderna.

Beskriv det mest anmärkningsvärda hos varje objekt!

21. *Konstruera en inre planets bana på himlavalvet, sedd från jorden.*

För Merkurius lämpligt avrundade data äro: omloppstid = 3 månader, avstånd från solen = 0,4 av jordens; för Venus: omloppstid = 7 ½ månader, avstånd från solen = 0,7 av jordens. Planeternas och jordens banor antagas cirkulära med solen i medelpunkten.

Jordens och planetens banor uppritas koncentriskt. En punkt på vardera, lämpligen så belägna, att sammanbindningslinjen mellan dem går genom solen, tages till utgångspunkt för en uppdelning av vardera banan i ett antal delar, som motsvara en viss tidrymd t. ex. 1 eller ½ månad. Synlinjerna från jordens olika lägen till planetens motsvarande lägen utdragas till en tredje, yttre, cirkel koncentrisk med de båda första, vilken föreställer himlavalvet och därför bör ha stor radie jämfört med jordbanans. Då erhållas på himlavalv-cirkeln de punkter, i vilka planeten vid olika tillfällen synes från jorden. Dessa punkter numreras i löpande följd. Om de därefter på lämpligt sätt förenas med varandra, erhålles en bild av planetens bana på himlavalvet, sedd från jorden.

22. *Konstruera en yttre planets bana på himlavalvet, sedd från jorden.*

Utföres på samma sätt som motsvarande konstruktion för en inre planet (se försök 21). För Mars lämpligt avrundade data äro: omloppstid = 2 år, avstånd från solen = 1 ½ ggr jordens; för Jupiter: omloppstid = 12 år, avstånd från solen = 5 ggr jordens.

23. *Konstruera månens bana kring jorden kombinerad med jordens bana kring solen.*

Härvid kan man antaga, att månen gör ett omlopp kring jorden på exakt en månad, och att såväl månens som jordens banor äro cirkulära med jorden resp. solen i banornas medelpunkt. Då månens avstånd från jorden är endast $^1/_{400}$ av jordens avstånd från solen, måste månbanan ritas oproportionerligt stor, ehuru relativt liten i förhållande till jordbanan. Förfaringssättet inses utan större svårighet.

Vilken modifikation skulle figuren undergå, om månens avstånd från jorden ritas i riktig proportion till jordens avstånd från solen?

24. *Konstruera jordens bana kring solen kombinerad med solens rörelse i världsrymden mot apex.*

Härvid måste hänsyn tagas till: 1:o) apex' koordinater: rektascension = ung. 270°, deklination = ung. + 30°; 2:o) ekliptikans pols koordinater, vilkas ungefärliga värden lätt uttagas från en stjärnkarta, på vilken ekliptikan är inritad; 3:o) solens hastighet, 20 km/sek., vilket värde måste omräknas till vägsträcka per år och jämföras med jordbanans radie.

Ur mom. 1:o och 2:o ovan finner man lätt ungefärliga storleken av den vinkel, som solens (rätlinjiga) rörelseriktning gör med jordbanans plan. Jordbanan själv bör tänkas sedd från sidan, varför den skall ritas elliptisk med solen i centrum. Jorden och solen utprickas i sina respektive banor i lägen, mellan vilka $^1/_4$ år tänkes hava förflutit.

Hur skulle månens bana te sig inritad i den så erhållna figuren?

Bokanmälningar.

Agne Wahlgren, *Apollonios' tre första böcker om kägelsnitten*, översatta till modernt matematiskt språk. A.-B. Seelig & C:o, Stockholm 1932, 191 sid., kr. 5: —.

Av antikens tre största matematiker, Archimedes, Euklides och Apollonios, äro de båda förstnämnda välkända långt utom fackkretsar, men den sistnämnde torde ej vara tillräckligt känd och uppskattad ens bland dem som bedrivit universitetsstudier i matematik. Man har därför anledning att tacksamt notera, att lektor Agne Wahlgren riktat vår ej alltför rikhaltiga matematiska litteratur på svenska med en översättning av de tre första böckerna av Apollonios' huvudarbete.

Apollonios' namn är förknippat med satsen om den harmoniska cirkeln (Apollonios' cirkel) och med det bekanta tangeringsproblemet. Hans förnämsta verk är dock de åtta böckerna om kägelsnitten (κωνικα στοιχεῖα), i vilket han samlat sin samtids vetande om de koniska sektionerna, kompletterat och utvecklat det till en imponerande lärobyggnad av sådan fulländning, att först nyare tidens matematik har haft något väsentligt nytt att tillägga. Vid sidan av Euklides räknas därför Apollonios som den klassiska matematikens störste systematiker. Av de åtta böckerna äro de fyra första bevarade på originalspråket, de tre följande blott i arabisk översättning, under det att den åttonde har gått förlorad.

De fyra första böckerna behandla den elementära kägelsnittsläran, som till större eller mindre del var känd redan före Apollonios, men han har utvidgat och systematiserat den. Det behandlade stoffet framgår av följande schematiska översikt: första boken behandlar de koniska sektionernas uppkomst, indelning och grundläggande egenskaper, skärning mellan räta linjer och kägelsnitt, tangenter, konstruktion av kägelsnitt ur givna element; andra boken asymptoter, kordor, diametrar och axlar; tredje boken ytsatser, pol- och polarteori, brännpunkter; och fjärde boken skärning och tangering mellan två kägelsnitt. Anmärkningsvärt är, att i Apollonios' framställning implicit ligga den analytiska geometriens koordinatbegrepp och den projektiva geo-

metriens definition av kägelsnitten såsom orter för skärningspunkter mellan projektiva strålknippen.

De följande böckerna behandla mera djupgående undersökningar, om normaler, maxima och minima, kongruenta och likformiga kägelsnitt och om konjugatdiametrar, bl. a. de båda satser, som än i dag bära Apollonios' namn i våra läroböcker i analytisk geometri.

Apollonios använder den grekiska matematikens tunga geometriska form, varför hans arbete i ordagrann översättning blir omständig och svårläst. Ett omklädande av innehållet i den moderna matematikens lätta och eleganta dräkt gör därför studiet mera njutbart för en nutida läsare och låter även den stolta logiska byggnaden framträda tydligare. Samtidigt måste även i än högre grad vår beundran väckas för den logiska skärpan och tankekraften hos Apollonios, som kunnat skapa detta monumentala verk trots den dåtida matematikens primitiva uttrycksmedel.

Dylika fria översättningar finnas förut utgivna på de stora kulturspråken. Lektor Wahlgrens svenska översättning inskränker sig till de tre första böckerna, som från skolans synpunkt äro av största intresset. I den mån en i de klassiska språken obevandrad kan fälla ett omdöme i denna sak, synes lektor Wahlgren på ett högst förtjänstfullt sätt ha skilt sig från sin uppgift. Språket är klart och koncist, uppställningen överskådlig. Dessutom äro satserna från innehållssynpunkt indelade i grupper, var och en försedd med innehållsöversikt och kortfattad kommentar, vilket underlättar studiet och förhöjer bokens värde. Den typografiska utstyrseln är god och det rikhaltiga illustrationsmaterialet (200 figurer!) utmärkt.

Lektor Wahlgrens arbete bör vara av stort intresse för varje matematiklärare, som undervisar på gymnasiet. Det lämpar sig även till uppgifter för enskilt arbete i realgymnasiets båda högsta ringar som ett värdefullt supplement till den analytiska geometriens behandling av kägelsnitten. I förordet har lektor Wahlgren lämnat några förslag till dylika uppgifter.

C. E. Sjöstedt.

W. N. Bond, *Numerical Examples in Physics,* London, Edward Arnold & Co, 1931. 128 sid.

Exemplen, 450 till antalet, äro avpassade efter engelska universitetsförhållanden. Ex. 1 lyder: Man önskar förfärdiga en cylindrisk ask av given volym, vars totala yta skall vara så liten som möjligt. Vilken form bör asken ha? — Ex. 450 lyder: Redogör för huvuddragen av Gamows kärnteori och angiv det samband

mellan α-partiklarnas initialhastighet och elementets halveringstid, till vilket teorien leder. — Däremellan finnes nytt och gammalt, svårt och lätt, i brokig blandning.

En läsare, som tillhör en mindre konservativ nation än den engelska, tycker måhända, att förf. inte bort störa den ärevördiga tangentbussolen eller den geisslerska kvicksilverpumpen i dess ålderdoms ro. Och när man hör om ett magnetfält, som är mätt i foot-grain-second el. -magn. enheter, bör man ha rätt att känna en viss lättnad över vad vi sluppit räkna. Men det finnes å andra sidan ett stort antal alldeles förträffliga exempel i boken.

Den lättaste gruppen (72 st.) är till största delen av den art, som förekommer vid våra gymnasier, och många av dessa exempel lämpa sig säkerligen väl för läroverkens skolskrivningar. På en och annan punkt, t. ex. elasticitetsteori, gå de dock längre. Även i fråga om formuleringen märker man en karakteristisk olikhet. Sedan försöksanordning och mätningsresultat meddelats, blir uppgiften ofta: »Deduce what you can from these data».

Mellangruppen (233 ex.) utgöres nog också på det hela taget av lätta problem, men de förutsätta i regel något vidsträcktare kunskaper än vår studentexamen meddelar. På vissa områden (geometrisk optik, termisk utvidgning, ångor) räcka studentkunskaper till att knäcka en hel del även av dessa problem.

Den svåraste gruppen (145 st.) är avpassad efter de engelska universitetens »Special Honours» eller »Part II Tripos». Många av dessa uppgifter torde vara en nyttig övning för studerande på ämbetsexamen, och de skulle säkert också för lärare i fysik kunna bliva en nyttig repetition på lediga stunder. Rec. misstänker blott, att fysiklärare med lediga stunder numera äro skäligen tunnsådda.

H. R. Lundblad.

A. G. Carell och E. O. Edelstam, *Lärobok i nautisk meteorologi.* Svenska Bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1931, 213 sid., kr. 7: —.

Läroboken, vars första upplaga utkom för ett tiotal år sedan, föreligger nu omarbetad och moderniserad. På ett förträffligt sätt har det omfattande och till sina gränser ganska obestämda ämnet tillrättalagts för navigatören, som måste vara ganska förtrogen med ifrågavarande kunskapsområden. Läroboken kan rekommenderas en var, som önskar en överblick av ämnet, vilket mera sällan koncentrerats i ett enda arbete utan oftast är att söka i meteorologiska eller oceanografiska specialarbeten och i seglingsbeskrivningar. Läroboken behandlar instrument- och observationslära, allmän och tillämpad meteorologi, allmän oce-

anografi och transoceanisk navigation och avslutas med de vanliga meteorologiska tabellerna och kartorna.

Den nautiska litteraturen har härigenom utökats med ett arbete, som ej allenast på ett utmärkt sätt kommer att fylla sin uppgift som lärobok utan även kan användas som handbok i ämnet.

C. G. A. Arvidson.

Böös-Lundberg, *Lärobok i kemi för gymnasiet.* Sv. Bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1931, 283 sid., kr. 6: —.

Delningen mitt itu av det 4-årigą gymnasiets kemikurs, påbyggandet av den fullständiga realskolan med ett treårigt gymnasium och införandet av kemi på latingymnasium som valfritt ämne har skapat en situation för läroboksförfattare inom det kemiska facket, som lindrigt sagt är enastående.

Skall jag författa en lärobok, tre läroböcker eller fyra? frågar man sig med handen för pannan. En bok anpassbar efter alla tänkbara önskemål och krav — eller skall varje skolform få sin?

Vid problemlösning brukar i allmänhet den enklaste lösningen vara riktig. Författarna ha gått in för enbokspricipen, vilket är diplomatiskt nog, icke minst i betraktande av att statsmakterna kanske ännu ej sagt sitt sista ord i denna fråga.

Föreliggande lärobok omfattar sammanlagt 283 sidor litet format av vilka 10 upptaga förord och biografiska notiser. Framställningen kännetecknas därför av en konsekvent måttfullhet och skärpa i uttrycken, som är ägnad att inge läsaren respekt. Samtidigt måste emellertid framhållas, att innehållets värde och bokens hanterlighet knappast skulle hava förlorat på om några kapitel givits en större bredd.

Enligt förordet är boken utarbetad i enlighet med lärogången för det treåriga realgymnasiet dock med hänsyn tagen till det 4-åriga realgymnasiets och latingymnasiets särskilda fordringar. Genom klamrar ha de delar av framställningen, vars behandling lämpligen bör anstå till det differentierade gymnasiets ringar, markerats. Om bemälda uppdelning gå meningarna åtskilligt isär. Det är emellertid värdefullt, att författarna genom detta sitt förfarande skapat en preliminär norm härför.

Författarna ha förmåga att åstadkomma korta och exakta definitioner. Här några exempel. Kritisk temperatur betecknas som »den högsta temperatur vid vilken ett ämne ännu kan existera i vätskeform», förbränning som »varje kemisk reaktion mellan ämnen under utveckling av ljus och värme», och kolloidal lösning såsom »ett fördelningstillstånd, som ligger mellan en verklig lösning

och en uppslamning». Gastäthet definieras som förhållandet mellan vikten av en viss volym av en gas och vikten av motsvarande volym av »en tänkt gas 16 gånger lättare än syre». Härmed undgår man på sätt och vis trasslet med reduktionstalet mellan väte och syre.

Många försöksanordningar verka tilltalande genom sin enkelhet. Reaktionen mellan vatten och järn visas t. ex. experimentellt med tillhjälp av ett svårsmält rör, som fasthålles på lut i ett stativ. I rörets lägre tillsmälta ände befinner sig något vatten. I den övre inskjutes ett glödskepp med ferrum reduktum. När detta glödskepp upphettas, kommer vattenånga att passera över järnet i den mån värmet ledes till glasrörets andra ände. Den bildade gasen uppsamlas och prövas på övligt sätt.

För påvisande av jämviktstillståndet mellan vatten å ena sidan och väte och syre å den andra införes en glödande spiral i vattenånga. Den bildade knallgasen uppsamlas och påvisas som vanligt.

Broms och jods karaktär av saltbildare ådagalägges genom zinkstofts förmåga att avfärga bromvatten, respektive jodtinktur.

Svaveldioxidens kondensation företages i ett för ändamålet till synes ändamålsenligt dubbelböjt rör med kranar, vilket även kommer till användning vid motsvarande försök med kvävetrioxid.

Försöksanordningen för framställning av svaveltrioxid (fig. 22) verkar tilltalande likaså motsvarande för påvisande av ammoniaks lösningsvärme och salmiaks bildningsvärme.

På kväve beskrives en enkel försöksanordning att i praktiken bränna ammoniak till salpetersyra samt ett instruktivt försök att visa kväveoxids och -dioxids framställning, egenskaper och inbördes förhållande.

Kiseldioxid upphettas med magnesium, varefter kiseln kan erhållas som gråbruna flockar efter massans uppslamning.

Hur aluminium reagerar med vatten under kvicksilvers inverkan hör till kemisk kuriosa, som förtjänar sin plats.

Bildmaterialet är överskådligt och upplysande. Exempel härpå må utgöra fig. 32 över en fabriksanläggning för framställning av salpetersyra, fig. 35, som visar en fabrik för framställning av norgesalpeter i längdgenomskärning och fig. 76 över ett gasverk.

Metalloidernas kemi behandlas på sidorna 5—94 med inslag av allmän och fysikalisk kemi såsom atomteori, Avagadros princip, termokemi och massverkans lag. På sidan 94 följer ett kapitel om lösningar inrymmande: löslighet i allmänhet, osmos, frypunktsnedsättning, dissociationsteorien med dess konsekvenser i

avseende på uppfattningen om kemiska reaktioners inträdande, syrors och basers styrka, neutralisation, betingelserna för ett ämnes avskiljande ur en lösning samt det kolloidala tillståndet. Så följer periodiska systemet enligt gammal välkänd uppställning.

Metallernas kemi avhandlas på sidorna 113—206, organisk kemi på sidorna 207—257. Efter en kort översikt över Sveriges kemiska industri behandlas till sist metoderna för molekular- och atomviktsbestämning, radioaktivitet och modern atomteori.

Den som värdesätter en exakt och lättillgänglig framställning av vad som utan diskussion bör ingå i studentkursen kan med fördel betjäna sig av föreliggande lärobok.

Samuel Hennichs.

Iwan Bolin och Bror Gustaver, *Kemi för gymnasiet*, Tidens förlag, Stockholm 1932, 428 sid., kr. 7: 25.

Föreliggande lärobok är enligt författarnas förord närmast avsedd för det treåriga gymnasiet. Vid användning i det 4-åriga gymnasiet bör den enl. författarna »kompletteras med en inledande, kortfattad framställning av kolföreningarnas kemi, t. ex. efter vår lärobok i kemi för realskolan II ...». Denna komplettering förefaller mig att kunna inskränkas till det minsta möjliga, om den överhuvud taget alls är nödvändig. Den organiska kemien behandlas på sidorna 281—348 på ett nog så ingående sätt.

Bokens omfång är ju rätt avsevärt i betraktande av att formatet är stor kvart och utrymmet väl utnyttjat. Bildmaterialet, som är lika rikhaltigt som värdefullt, tar emellertid rätt stor plats i anspråk. Författarna framhåller också i företalet, att detta »beror på att den hastiga utvecklingen av kemisk forskning, kemisk teknologi och industri nödvändiggjort medtagandet av en del nytt, värdefullt stoff, dels därpå, att vi, i avsikt att underlätta bokens användning för fritt bedrivna självständiga studier, givit framställningen större bredd och överskådlighet, och slutligen därpå, att vi tagit med ett par kapitel: om titreranalys (kap. 21) och fotokemi (kap. 24), vilka ej äro föreskrivna i kursplanen, men som äro värdefulla för laborationsarbete och för enskilda studier».

Det »absolut» nya, som tillkommit, motiveras i allmänhet fullt ut genom den användbarhet, som på sistone tillkommit en del förut ur praktisk synpunkt värdelösa kemikalier. Att kapitlen svällt ut beror till huvudsaklig del på att de gamla kemiska grundsanningarna, tack vare det vidgade utrymmet, fått en uttömmande och sakligt vederhäftig klarläggning, som gör läsaren glad ända in i själen.

Nyttighetsprincipen, som för viss kategori människor är som ett rött skynke, passar oss naturvetare förträffligt. På denna punkt ha vi resonans hos det uppväxande släktet. För den unga gymnasisten bör det därför kännas hugnesamt att på var och varannan sida i sin kemilärobok skåda den lilla rubriken »användning». Den kontakt med kemisk teknologi och industri, som förordet utlovar, har infriats på ett aktuellt sätt.

De kapitel om titreranalys och fotokemi, vilka ställas utom den egentliga lärokursen, omfatta sammanlagt 17 sidor. Deras uteslutning innebär sålunda knappast någon beskärning av lärostoffet.

Även med hänsyntagande till allt vad som kan andragas till det ökade utrymmets favör är det ofrånkomligt, att bokens innehåll taget i dess helhet utgör en överkurs för studentexamen. Det synes ej heller vara författarnas mening, att innehållet på något sätt skall komma att utgöra något mått på vad som skäligen bör fordras av en student. De hänvisa fastmer delar av framställningen till »fritt bedrivna, självständiga studier».

Det hade därför varit lyckligt, om författarna med något av de medel, som står sättaren till buds, markerat de kapitel, vilka äro avsedda för den kemiskt mer receptive. Härigenom hade boken blivit mer hanterlig och dess nyttjande mer likformigt olika läroverk emellan. Detta blir nu kemikonferensernas och den enskilde lärarens sak att verkställa.

Sagda sovring av materialet kommer emellertid att bli en lätt sak, och detta av tvenne skäl. För det första därför att de delar, som böra bliva föremål för densamma, hänföra sig till vissa bestämda kapitel. Behandlingen av den »rena» kemien, metalloidernas, metallernas och kolets kemi, har fullt tillfredsställande proportioner. De kapitel som avhandla allmän och fysikalisk kemi äro utmärkt skrivna, men förefalla däremot väl vittomfattande. För det andra är boken väl disponerad med kapitel, moment samt underavdelningar med både stora och små bokstäver i stort antal. Detta gör, att de minsta delarna i allmänhet komma att innehålla endast en sak, vilken man sålunda antingen kan taga till hjärtat eller lyfta på hatten för och gå förbi. Å andra sidan är det ju värdefullt, att rik tillgång på stoff föreligger för den mer intresserade.

På första sidan återfinna vi porträtten av fyra svenska stormän inom kemiens historia: Bergman, Scheele, Berzelius och Arrhenius — en förtroendeingivande upptakt.

Kapitel 1 moment 1 lämnar en kort översikt över huvudskedena av kemiens historia. Övriga historiska notiser återfinnas med

petitstil som små ingresser till behandlingen av respektive element. Moment 2 av samma kapitel behandlar grundämnenas relativa förekomst i den oss tillgängliga delen av naturen.

Med kap. 2 inledes behandlingen av metalloidernas kemi. Det avhandlar de gasformiga grundämnena i luften: syre, kväve och ädelgaserna. Kap. 3 behandlar vatten och väte, kap. 4 bor, kol och kisel, kap. 6 fosfor, kap. 8 svavel och kap. 10 halogenerna. Sammanlagt utgöra dessa kapitel 78 sidor.

Framställningen är utomordentlig och sker med samma rytm boken igenom. Till det goda intrycket bidrager måhända den omständigheten, att texten ej splittrats i onödan genom feta rubriker, växling av stilart och hänsyftningar till noter.

På kol har medtagits ett försök att bränna magnesium i koldioxid, Wöhlers syntes samt knall- och rodanvätesyrorna. På kisel beskrives ett försök att bränna en blandning av kiselgur och magnesium, vilken användes till blixtljus. Det ytterst riskabla försöket att framställa fosforväte har ersatts med ett annat, som förefaller mer sympatiskt. Utgångsmaterialet är här kalciumfosfid.

På svavel omnämnes flytande svaveldioxids bruk i frysmaskiner och kylskåp, undersvavelsyrligheten och tiosvavelsyran med salter. Selens många intressanta användningar förbigås ej, ej heller natrium- och litiumjodids förmåga att göra blodkärl synliga vid röntgenfotografering.

Dessa spridda notiser torde vara tillräckliga för att visa, att innehållet är högaktuellt.

I denna första del av boken finnas rika inslag av allmän och fysikalisk kemi. Kap. 5 behandlar atomer och molekyler, kap. 7 lösningar och kolloider, kap. 9 elektrolyter och kap. 11 periodiska systemet, elektrolytiska spänningskedjan, galvaniska element, översikt över metallers, basers, syrors och salters framställning, den kemiska nomenklaturen m. m.

Denna allmänna kemi omfattar sammanlagt 68 sidor. Behandlingen ligger på ett plan närmast passande det 4-åriga gymnasiets tredje ring. Det ökade utrymmet har bidragit till att göra framställningen så klar och redig, att varje möjlighet till missförstånd är utesluten. Inga torra dogmatiska lagar och definitioner förekomma. Kunskapen meddelas på den personliga övertalningens väg.

Kap. 5 omfattar i anslutning till atom- och molekylarläran V. Meyers molekylarviktsbestämningsmetod. För verifikation av Gay-Lussac's volymlag har valts reaktionen mellan koloxid och syre till koldioxid. Kap. 7 om lösningar och kolloider kan till stor del

med fördel rekommenderas för självstudium. Vid den experimentella verifikationen av Faradays elektrolytiska lag komma lösningar av såväl kopparklorid som kopparklorur till användning. En direkt jämförelse mellan ett grundämnes olika ekvivalentvikter är härigenom möjliggjord. Som efterlöpare till dissociationsteorien kommer behandlingen av syrors och basers styrka, neutrala, sura och basiska salter, hydrolys, jonernas reaktioner och fysikaliska egenskaper. Med rätta har tyngdpunkten blivit förskjuten till förmån för dissociationsteoriens värde som teoretisk bakgrund för snart sagt allt kemiskt skeende.

Kap. 11 behandlar periodiska systemet enligt den gamla hederliga uppställningen, elementens sätt att överensstämma och skifta i egenskaper i olika riktningar av detsamma, elektrokemi med de galvaniska elementen som osökt tillämpning härpå m. m. Vissa delar kunna med fördel avskiljas för självstudium.

Vi äro nu framme vid sidan 160. Här börjar metallernas kemi. Den räcker t. o. m. sid. 280, alltså summa 120 sidor. Framställningen är överlägsen. Det är förunderligt ändå, vilka landvinningar i användbarhet metallerna och deras föreningar ha gjort i dessa yttersta tider. Snart leva vi i de lätta metallernas tidsålder. Uppställningen följer med rätta periodiska systemet. Ur skolsynpunkt mera »sällsynta» metaller såsom litium, beryllium, kadmium, titan m. fl. ha fått ett bredare, ehuru ej tyngande omnämnande. På kalcium behandlas konstgödningsämnena i ett sammanhang. Att glastillverkning, porslins- och cementindustri kommit mer till sin rätt är tacknämligt. Moderna och aktuella verka uppgifterna om besprutning av fruktträd mot skadedjur med blyarseniatlösning från flygmaskin eller om järnkarbonyls användning som tillsats till bensin för förebyggande av motorns »knackningar».

Ett moment på järnets kemi om specialstål och metallurgi bör fängsla den kemiskt vetgirige.

Efter varje grupp grundämnen följer den obligatoriska sammanställningen med ty åtföljande välbehövlig återblick.

Kap. 22 omfattar den organiska kemien på 68 sidor. Acykliska och cykliska föreningar behandlas tillsammans allt efter överensstämmande ämnesgrupp. Moment 3 på 9 sidor om bränslen lämpar sig väl för självstudium så även delar av fetters och kolhydrats kemi samt slutmomentet om industrier, som grunda sig på utnyttjandet av stenkolstjärans produkter.

Kap. 23, om 30 sidor, är rubricerat »reaktionslära». På den Bergmanska frändskapslärans fallna ruiner kan erfarenheter göras, som få en uttömmande sammanfattning i massverkans

lag. Som exempel på nämnda lags tillämpande på homogena system ha valts esterbildningen, kontaktmetoden, Birkeland-Eydes syntes av kväveoxid samt på heterogena system: kalciumkarbonats och salmiaks termiska dissociation. Begreppet löslighetsprodukt med dess tillämpning på analytisk utfällning, vattnets dissociation, teorien för buffertlösningar och neutralisationsvärmet bilda tillsammans kapitlets eftertrupp.

Kap. 24 om fotokemi avhandlar kolsyreassimilationen, fotografi och blåkopiering.

Kap. 25 om radioaktivitet och kap. 26 om den moderna atomteorien omfatta vardera 8 sidor och innehålla, vad som kan anses skäligt.

I slutkapitlet 27, om 10 sidor, bringas på tal vissa delar av den teoretiska kemien, såsom det svåra valet av atomvikt bland ett ämnes föreningsvikter, de allmänna gaslagarna med van't Hoffs tillämpning av dem på lösningar samt jonkoncentrationens inverkan på potentialsprånget i beröringsytan mellan en metall och lösningen av ett dess salt.

Använd med måtta och sans kan föreliggande lärobok med fördel tjäna det höga syftet att öppna blicken hos det uppväxande släktet för naturens underbara rikedom.

Samuel Hennichs.

N. E. Persson, *Lärjungeförsök i kemi* för folkskolans högsta klasser och fortsättningsskolan. C. E. Fritzes förlag, Stockholm, 32 sid., 50 öre.

Häftet innehåller 40 försök, uppdelade på 11 avdelningar samt en i förhörsform skriven sammanfattning, i vilken även meddelas en del kemiska tecken och formler. Avdelningarna äro: I. Kemisk reaktion, kemisk förening, några salter (4 försök); II. Väte (2 försök); III. Kalium och natrium (3 försök); IV. Kolsyra och några av dess salter (10 försök); V. Klor och några klorföreningar (3 försök); VI. Syre och syreföreningar (6 försök); VII. Tändstickor (2 försök); VIII. Krut (2 försök); IX. Tvättmedel (5 försök); X. Vattnets sammansättning (1 försök); XI. Luftens sammansättning (2 försök). Dessutom 13 teckningar och register.

Förf. deklarerar i förordet, att syftet med hans arbete är att föreslå försök med anknytning till barnens egna erfarenheter och belysande sådana kemiska företeelser, som de komma i beröring med i sitt dagliga liv, ävensom att försöken skola kräva ringa apparatur och vara lätta att utföra. Bedömer man boken härefter, så måste man säga, att han ej helt lyckats. Anmälaren anser, att sådana försök som vattnets volymssammansättning, framställning

av zinksulfat, zinkklorid och järnsulfat (upplösning av metall i syra), framställning av klor och klorväte och framförallt försök med metallerna kalium och natrium icke äro att räkna till vardagslivets kemi, under det att kännedom om ett flertal kemikalier, såsom putsmedel av olika slag (ej endast tvål), bläck, försök över vattnets renhet och hårdhetsgrad, reduktion av vissa viktiga metalloxider med kol m. m. borde höra hemma i en sådan kurs, men här saknas. Försöket att införa natrium i ett provrör, fyllt med vatten, för att samla upp den bildade vätgasen, är förenat med så stora risker, att det aldrig borde förekomma som laborationsförsök. Vattensönderdelningsapparaten är alltför dyrbar för att rekommenderas i ett arbete av denna art och den av förf. avbildade gasutvecklingsapparaten fungerar mindre tillfredsställande. Som värmekälla förordar förf. gas eller spritlampor. Varför ej metatabletter, som äro vida att föredraga, då gas ej finnes? De innebära mindre risk än spritlampor och kunna även användas till böjning av glasrör.

De teoretiska delarna av framställningen lämna i fråga om korrekthet en del övrigt att önska. På sid. 9 säger förf. (sedan upplösning av zink i utspädd svavelsyra behandlats), att om svavelsyra får inverka på järn och *koppar* (kursiverat av anm.) får man andra salter. Det är väl dock ej meningen att lösa koppar i *koncentrerad* svavelsyra? De på sid. 13 förekommande uttrycken »lutaktiga ämnen» och »sura ämnen» äro mindre väl valda. På sid. 20 säges, att koldioxid består av 2 delar syre och 1 del kol, därav namnet *di*oxid, vilket är felaktigt. Det är nödvändigt att införa begreppen atomer och molekyler, om man vill ge sig in på kemisk sammansättning och kemiska formler. Figurerna äro enkla och väl ritade, fig. 1 (vikning av ett filter) kan dock missförstås.

I förordet säger förf., att häftet är tillkommet för att häva bristen på handledningar, lämpliga att sätta i händerna på eleverna. Man kan då med skäl fråga sig, om handledningar av ifrågavarande art äro nödvändiga. I denna är i själva verket beskrivningen av försöken ej stort utförligare än i de flesta läroböcker, det enda är, att före varje försök tillkommer några rader, som upplysa om vilken materiell som kommer till användning vid försöken. Men det går väl lika bra att skriva upp på tavlan. En mera utförlig beskrivning på en rikligare samling skolförsök med uppgift om materiell och förfärdigandet av lösningar och enkla apparater föreligger i undertecknad Gustavers »Handledning vid kemiundervisningen i folkskolan». I bokhandeln finns det vidare en samling för skolungdom på detta stadium avsedda experiment-

böcker, som innehålla ett flertal trevligt skrivna, roande och lärorika försök i fysik och kemi, nämligen de av dr. Bolin utgivna »Försök själv», »Experimentboken» och »Trolleriboken». Dessa äro tack vare sin intresseväckande framställning betydligt mera lämpade att sätta i händerna på barnen än det läroboksmässigt torra häfte, som här recenserats.

Bror Gustaver.

Gradualavhandlingar.[1]

Allan Bernton, *Beiträge zur Kenntnis der optisch aktiven Thiomilchsäuren, ihrer Mercaptide und Disulfide.* Lund 1932, 119 sid. Disp. i Uppsala 23 april 1932. Opponenter: docent Arne Tiselius och docent Knut Sjöberg.

Förf. har reviderat och utvidgat en undersökning av J. M. Lovén från 1882 över spjälkningen med fenyletylamin av den genom oxidation av tiomjölksyra, $CH_3CH(SH)COOH$, bildade ditiodilactylsyran, $[HOCOCH(CH_3)S-]_2$ i dess optiskt aktiva komponenter. Genom reduktion av dessa aktiva ditiosyror kunde L. vidare isolera de motsvarande aktiva tiomjölksyrorna. Förf. har nu åter framställt dessa syror och med användning av en Zeiss' monokromator bestämt såväl deras som deras salters vridningsförmåga för 10 våglängder jämte vridningens beroende av temperatur och koncentration. Det av L. för tiosyran funna, ovanligt höga vridningsvärdet $\pm 429°$ vid 15° har nu funnits böra höjas till $\pm 467°$, och vridningen avtog med icke mindre än 2°,83 vid en temperaturstegring av 1°. — Under det att den inaktiva tiomjölksyran är flytande, befunnos de isolerade, högaktiva tiomjölksyrorna vara *fasta* substanser med smältpunkten 36—37°. Av salterna hade *di*-natrium- och bariumsalterna samma vridningsriktning som den syra, varav de framställts, medan *mono*-salterna i likhet med silver- och kvicksilversalterna vredo åt motsatta håll. De sistnämnda äro mera ingående behandlade och de aktiva formerna isolerade och karakteriserade. Mesoformen kunde icke isoleras. Inom Zn-Cd-Hg-gruppen ökades vridningen med stigande atomvikt av metallen, men minskades inom As-Sb-Bi-gruppen. Vismutsaltet visade f. ö. en spec. vridning av ej mindre än $\pm 1364°$. Dispersionen var normal. — Nyframställda äro vidare såväl inaktiva som aktiva former av syror med formeln

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

$CH_3CH(SHgX)COOH$, där X betecknar klor, brom eller jod. — Med såväl ditio- som med tiomjölksyra äro inaktiveringsförsök anställda.

ERNST BENGTSSON-KNAVE, *Über die Bandenspektren einiger Metallhydride.* Uppsala 1932. 98 sidor + 1 plansch. Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Disp. i Stockholm den 30 maj. Opponenter: prof. E. HULTHÉN och fil. lic. E. SVENSSON.

Studiet av bandspektra har i stor utsträckning kommit att omfatta undersökningar över de tvåatomiga metallhydridernas spektra. Att just dessa föreningar valts beror dels på lättheten att erhålla intensiva ljuskällor dels ock på de relativt stora linjeavstånden i banden, som avsevärt underlätta bandanalysen. Denna analys grundar sig framför allt på de banbrytande idéer, som den unge alltför tidigt bortgångne lundadocenten HEURLINGER framkastade och som sedan av KRATZER, HULTHÉN, HUND, MULLIKEN m. fl. så vackert utformats.

I denna avhandling har förf. redogjort för sina undersökningar över koppar-, silver- och guldhydriderna — CuH, AgH och AuH — samt vidare av de joniserade hydriderna $(BeH)^+$, $(ZnH)^+$ och $(CdH)^+$. Dessa senare hydrider tänkas därvid uppkomna ur motsvarande normala hydrider, BeH etc., genom förlusten av en elektron. Slutligen har en ingående undersökning i olika våglängdsområden av aluminiumhydriden AlH genomförts.

Av de tre först nämnda hydriderna är AgH den bäst undersökta. Cirka 2500 linjer ha kunnat inordnas i ett och samma bandsystem. Som ljuskälla har därvid använts en elektrisk ljusbåge i vätgasatmosfär, varvid den positiva elektroden bestod av en legering av silver och aluminium. Legeringens procenthalt motsvarade minimumpunkten å smältpunktkurvan för legeringar av silver och aluminium. Temperaturen i bågen har därigenom kunnat avsevärt sänkas och således hydridens sönderfall förminskas. Flera intressanta oregelbundenheter har vid analysen kunnat konstateras. Även isotopieffekten, härrörande från silvrets båda isotoper 107 och 109, har studerats och formler för uppspaltningen givits. Mängdförhållandet isotoperna emellan har även fotometriskt undersökts och visat sig stämma med vad ASTON funnit.

Av särskilt intresse är bestämningen av hydridernas sönderfallsprodukter, varvid man utgår från att hydriden sönderfaller i en väteatom i normaltillståndet och i en metallatom eller metalljon i normaltillståndet eller i något högre aktiverat tillstånd. Denna

bestämning blir i vissa fall mycket osäker beroende på att molekylens dissociationsenergi endast approximativt kan beräknas. En jämförelse mellan de ur analysen erhållna bandkonstanterna för å ena sidan den normala hydriden å andra sidan den joniserade hydriden med samma antal elektroner gåvo därvid avsevärt fastare hållpunkter för en dylik bestämning.

För den joniserade berylliumhydriden förelåg tidigare endast relativt osäkra mätningar å ett fåtal band. För dessa band föreligga nu noggranna mätningsresultat. Vidare har undersökningen utsträckts att omfatta ett större våglängdsområde, varvid upptagningarna längst ned i ultraviolett äro gjorda med uppsala-institutets stora kvartsspektrograf.

I allmänhet har för varje hydrid endast ett bandsystem blivit undersökt. För aluminiumhydriden åter ha fyra bandsystem kunnat påvisas, av vilka 3 ej tidigare voro kända. Analysen av banden visar, att tre av systemen ha gemensamt sluttillstånd, under det att det fjärde är ett interkombinationssystem mellan två av de övriga.

Detta senare system har haft sitt särskilda intresse. Enligt kvantamekaniken indelar man rotationstermerna i positiva och negativa. Vid en tillåten övergång från rotationstermer i ett elektrontillstånd till ett annat fordras att positiva termer skola kombinera med negativa och tvärtom. Den första experimentella bekräftelsen på denna rent teoretiskt uppställda regel lämnar analysen av detta bandsystem.

Vidare är det vid undersökningarna över aluminiumhydridens spektra, som författaren kunnat påvisa en ny effekt, den s. k. tryckeffekten i bandspektra. Denna effekt visar sig i en avklippning av serierna vid låga tryck. Dessa vid lågt tryck försvinnande linjer visa vid högre tryck en påfallande utbredning. Denna utbredning kan förklaras som ett molekylens sönderfall genom rotation. I avhandlingen visas nämligen, att energien för de rotationstermer, som svara mot linjer, vilka visa utbredning, ligga över molekyltillståndets dissociationsgräns. Härigenom bliva dylika energitillstånd instabila och motsvarande spektrallinjer utbredda.

Gunnar Hedestrand, *Studien über amphotere Elektrolyte.* Lund 1932, 134 sid. Disp. vid Stockholms Högskola 11 maj 1932. Opponenter: doc. A. Ölander och fil. dr. Hans Bäckström.

De amfotera elektrolyter, som undersökts, äro huvudsakligen aminosyror, speciellt alifatiska sådana. Arbetet omfattar bestämningar av viskositeten och elektriska ledningsförmågan i lösningar

av glykokoll och alanin ävensom gelatin och serumalbumin vid olika p_h, dels med, dels utan neutralsalt, vidare bestämningar av dielektricitetskonstanten (DK), brytningsindex och spec. vikt hos vattenlösningar av ett flertal aminosyror samt elektriska överföringsförsök på lösningar av glykokoll och alanin vid olika p_h och saltkoncentration.

Viskositetskoefficienten för amfolytens joner är större än för de elektriskt neutrala molekylerna, varför viskositetskurvan uppvisar ett minimum. Emedan koefficienten för de negativa jonerna är större än för de positiva, ligger minimet något på sidan om den isoelektriska punkten. Den elektriska ledningsförmågan hos blandningar av en aminosyra och ett neutralsalt är inom det isoelektriska området större än som beräknas enligt blandningsregeln, vilket visar, att neutralsalter åstadkomma en jonisation av amfolyten.

Enligt Bjerrums teori utgöres den icke joniserade delen av en amfolyt som de alifatiska aminosyrorna av zwitterjoner eller amfojoner. Dessa molekyler böra ha stort elektriskt moment, och teorien stödes av det faktum, att vattenlösningar av aminosyror ha högre DK än vatten. Ökningen är proportionell mot koncentrationen och växer med avståndet mellan karboxyl- och aminogruppen, alltså med längden av dipolen. Ur mätningarna av DK, brytningsindex och spec. vikt har molekularpolarisationen, molekularrefraktionen och dipolmomentet hos några aminosyror beräknats. Molekularrefraktionen avtar med stigande koncentration i ungefär samma grad som hos starka elektrolyter. Detta förklaras genom association mellan amfojonerna, varvid polariserbarheten minskas. Vanlig association mellan oelektriska molekyler skulle icke leda till så stor minskning, varför härigenom ytterligare stöd för Bjerrums teori erhålles.

Överföringsbestämningarna visa, att katjoner medföra aminosyremolekyler vid sin vandring. Dessa fasthållas vid jonerna sannolikt på samma sätt som vattenmolekylerna i hydratationshöljet; en »amfolytation» av jonerna äger rum. En sådan är förenlig endast med en dipolbyggnad hos aminosyrans molekyler.

Avhandlingar och uppsatser i läroverkens årsredogörelser 1931—1932.[1]

Thorsten Rocén, *Kemikursen inom det treåriga realgymnasiet.* Några synpunkter. Högre allm. lärov. i Uddevalla. (7 sid.).

Ivar Johansson, elev i R II[3] vid Uddevalla högre allm. lärov., *En kvartärgeologisk och floristisk undersökning av ön Eggera i norra Bohuslän.* (Enskilt arbete). (18 sid.).

Gustav Eriksson, *Förteckning över laborationer i fysik vid högre allm. lärov. Skövde.*

Max Grenander, *Från den lysande barometern till röntgenröret.* Ett stycke ur fysikens historia. Tekniska lärov. i Eskilstuna (15 sid.).

C. E. Sjöstedt, *Projektiv geometri.* Högre allm. lärov. i Östersund (85 sid.).

Föreläsningar för lärarekandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1931—32.

Göteborg: adjunkt J. Lundberg, 3 förel. omfattande planläggning av gymnasiets kemikurs, i synnerhet inpassande av de allmänna kemiska satserna i kursen, samt det enskilda arbetet i kemi, lämpliga uppgifter härför, litteratur m. m.

Lund: lektor G. Forsström, Valda delar av gymnasiets fysikkurs (2 t.); lektor B. Svensson, Valda delar av gymnasiets matematikkurs (2 t.).

Stockholm: adjunkt O. Eneroth, Om likformig avbildning (3 t.) samt Om ränteräkningens metodik på olika stadier (2 t.); lektor E. Jönsson, Den elektriska strömmens användning vid kalorimetriska försök (1 t.); adjunkt B. E. Nyström, »Falska» rötter och rötter som »komma bort» (1 t.); lektor E. Ramstedt, Atomläran, belyst genom radioaktiva fenomen (2 t.); lektor G. Starck, Några drag ur atomkemien (3 t.).

Uppsala: lektor B. Eriksson, Läroverkets nya lokaler för gymnasieundervisningen i fysik (2 t.) och övning i handhavandet av apparatur m. m. (1 t.); adjunkt P. Granath, Om lokalerna för undervisningen i fysik i realskolan (1 t. övning).

[1] Uppgifterna om avhandlingar och föreläsningar ha godhetsfullt lämnats av Skolöverstyrelsens statistiska avdelning.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska kemistsamfundet. Årligen 12 häften.

Ur innehållet i årg. XLIV, 1932. N:r 3 (mars): S. Odén, Sedimentationsanalysen och dess tillämpning på kemiska, agrikulturkemiska och tekniska problem (forts. och slut). H. Fredholm, Bestämning av magnesium medelst 8-oxikinolin. P. Klason, Bidrag till kännedomen om lignosulfonsyra. — N:r 4 (april): K. Josephson, Moderna mikrokemiska metoder. — N:r 5 (maj): L. Ramberg, Destillationsapparater för framställning av vatten av hög renhetsgrad. — N:r 7 (juli): P. Klason, Sammanfattande undersökningar inom barrvedens kemi. L. Ramberg, Några ord om mikrovågar av Kuhlmann-typ. — N:r 8 (aug.): K. Myrbäck, Nyare åsikter om den alkoholiska jäsningens natur. — Referat och översikter. Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. XIII, 1932, dubbelh. 1—2.

Ur innehållet. Östen Bergstrand, Natthimlens och zodiakalljusets fotometri. — C. V. L. Charlier, Astronomernas ställning till religionen. — Åke Wallenquist, Javanernas tideräkning. — K. G. Malmquist, De statistiska undersökningarna rörande stjärnsystemets byggnad. — Knut Lundmark, Astronomer och observatorier.

Industritidningen Norden. Årg. 1932, h. 11—36.

Ur innehållet. Amfibieflygplan. — Faraday som metallurg. — Ultraröda strålar och deras användning. — Till minnet av Morse. — Ljusbågssvetsning med högfrekvent växelström. — Sändarestation för television. — Bilringens och vägens friktionsmotstånd. — Elektriska strömmens farlighetskurvor. — Socker ur cellulosa. — Michelin-järnvägsvagnen. — Flygplanet i forskningens tjänst. — Nyheter inom aluminiumtekniken. — Gnistinduktorn. — Beskrivningar av nya patent och uppfinningar.

Era. Elektricitetens rationella användning. Årg. 1932, h. 3—8.

Ur innehållet. Ljusskyltens teknik. — Energistölder och möjligheter att förebygga dem. — En ny Osram-belysningsmätare. — Om kökselektrifieringen i Halmstad. — Isolationskontroll. — Varmvatten med elektrisk energi. — Om samkörningen vid statens centralblock. — Den svenska åskforskningen. — Elektroflygeln. — Många notiser om ny materiell.

Radioamatören. Årg. 1932, h. 4—9.

Ur innehållet. Television enl. von Ardenne. — Kopplingar med högvoltsrör. — Om bryggmätningar. — Vad menas med inre motståndet i ett rör? — Ett 500-kilowattsrör. — Automatisk ljudstyrkereglering. — Piezoelektriska högtalare, mikrofoner och elektrodosor. — Beskrivningar av nya apparattyper.

The L. M. Ericsson Review. Tidskrift för Ericsson-Koncernen. Årg. 1932, h. 1—6.

Ur innehållet. Beräkningsmetoder för elektriska filter. — Utvecklingsmöjligheter och tendenser inom kraftöverföringstekniken. — Om skogstelefonledningar. — Reduktion av en variabel elektrom. kraft till en konstant med Heavisides operatorkalkyl. — Allmän metod att bestämma svängningar hos ett ledningsnät med små förluster. — Nätljudseliminering vid radioapparater med kompensationsmetoder.

Matematisk Tidsskrift. København 1932, h. 1—2.

Ur innehållet i avd. A. David Fog, Elementærgeometri IV, Inversion. — S. A. Christensen, Ekshaustion-Integration II, Archimedes. — J. L. V. Jessen, Annuitetsformeln. — Litteraturanmeldelser. — Danske Eksamensopgaver. — Ur avd. B. J. Nielsen, Om regulære Riemannske Flader. — H. Kneser und W. Süss, Die Volumina in linearen Scharen konvexer Körper. — T. Bonnesen, Beweis einer Minkowski'schen Ungleichung. — J. Nielsen, Om Strukturen af en Vektormodul med endelig Basis.

Fysisk Tidsskrift. København 1932, h. 2—3.

Ur innehållet. R. E. H. Rasmussen, Om Radiometerkræfter, en historisk Oversigt. — Nogle simple Skoleforsog af N. Chr. Lunding og af V. Borelli Møller. — L. Hartmann, Straalebolgekommutatorens konstruktive Udvikling. — R. E. H. Rasmussen, Om Sammensætning af Impedanser. — Boganmeldelser.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Oslo 1932, h. 1—2.

Ur innehållet. O. M. L. Selberg, Om bestemmelse av algebraiske funksjoners maksima og minima uten derivasjon. — J. Schrøder, Zur Berechnung von Teilsummen der summatorischen Funktion der Möbius'schen Funktion $\mu(x)$. — T. Nagell, Über das arithmetische und das geometrische Mittel. — O. P. Arvesen, Om fremstillingen av konform avbildning. — Bokanmeldelser. — Opgaver.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

536) *I en cirkel O inskrives ett parallelltrapets ABCD, där* $AB = BC = CD$. *OC skär AD i H. F är fotpunkten på AD av höjden från C. AD delas i punkten I så, att* $AI = 2 \cdot ID$. *Visa, att* $HI = 2 \cdot IF$. *Victor Dorph.*

537) *AB är diameter i en given halvcirkel, P en variabel punkt på AB. Man uppritar på AP och PB som diametrar halvcirkelbågar åt samma håll som den givna. Visa, att den cirkel C, som tangerar dessa tre bågar, ständigt tangerar en annan fix cirkelbåge AB (utom den givna) och beräkna gradtalet för denna båge.* *X.*

538) *Ett antal av* 2^n *kort, varav hälften äro markerade med en etta och hälften med en nolla, utläggas så, att efter varje utlagt kort (räknat från och med det första) nästa kort placeras sist i talongen, varefter följande kort utlägges o. s. v. Hur böra ettor och nollor fördelas för att utläggningen skall ge resultatet 101010...?* *S. Wigert.*

Enklare matematiska uppgifter.[2]

539) En rätvinklig triangel delas i två deltrianglar medels höjden mot hypotenusan. Bevisa, att denna höjd är = summan av radierna i de tre trianglarnas inskrivna cirklar.

540) I en triangel äro a och h_a givna. Bissektrisen v_a är medelproportional till de delar, i vilka den delar sidan a. Uttryck v_a i a och h_a.

Svar: $8v_a^2 = a^2 + 4h_a^2$.

541) Två kongruenta och koncentriska reguljära n-hörningar uppritas så, att den ena övergår i den andra, om den vrides

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 539—550 äro insända av X.

vinkeln α, som kan antagas $< \frac{2\pi}{n}$. Visa, att den del av den förstnämnda polygonens yta, som ligger utanför den andra, utgör bråkdelen $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\alpha}{2}\right)$ av polygonens hela yta.

542) I en triangel är $a = 4$ cm, $b - c = 1$ cm och $h_b + h_c = 7$ cm. Beräkna vinklarna β och γ.

Svar: $\beta = 76°,87$; $\gamma = 50°,93$.

543) M är mittpunkten på höjden från A i en regelbunden tetraeder $ABCD$. Visa, att planen genom M och kantlinjerna BC, CD och DB bilda ett trirektangulärt hörn.

544) De fyra sidoytorna i en tetraeder med ett trirektangulärt hörn bilda i lämplig ordningsföljd en aritmetrisk serie. Beräkna de spetsiga kantvinklarna.

Svar: $39°,33$; $56°,85$ och $71°,31$.

545) En regelbunden tetraeder $ABCD$ har ett hörn i A (4; 0), ett andra i B (— 4; 0) och ett tredje i C på potitiva y-axeln. Sök kortaste vägen på tetraederns yta från (0; 5) till den punkt (i ytan DAB), som har projektionen (2; 1) i xy-planet.

Svar: $\sqrt{40}$.

546) Tangenter dragas till två cirklar från en godtycklig punkt på deras radikalaxel. Visa, att tangentkordorna råkas på radikalaxeln.

547) Från en punkt P på positiva y-axeln dragas de tangenter PT_1 och PT_2 till cirklarna $x^2 + y^2 + 2x = 0$ och $x^2 + y^2 + 8x = 0$, vilka icke sammanfalla med y-axeln. Bestäm P så, att $\angle\, T_1PT_2$ blir den största möjliga.

Svar: P:s koordinater äro (0; 2).

548) Från punkten P dragas tangenterna PA och PB till cirkeln $x^2 + y^2 - 2x = 3$. Då kontaktpunkterna A och B förenas med origo O, blir $\angle\, AOB = 90°$. Visa, att P ligger på cirkeln $3x^2 + 3y^2 - 14x = 21$.

549) Bestäm koefficienterna a, b och c i funktionen

$$y = (ax^2 + bx + c)\,(x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}, \text{ om } y' = x^3(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}.$$

Svar: $a = \frac{3}{14}$; $b = 0$; $c = -\frac{9}{56}$.

550) Giv ekvationen för den räta linje, som jämte linjerna $x+y=1$ och $2x-3y=1$ avgränsar en triangel med tyngdpunkten i origo.

Svar: $3x-2y=-1$.

Lösningar till uppg. 484—486.

484) *Man har två lika stora volymer V av två vätskor med spec. vikt e′ och e″. Man tar av den första en viss mängd v < V och slår i den andra. Därpå tar man av denna blandning mängden v och slår i den första vätskan. Denna operation upprepas n gånger. Huru stora äro då de båda vätskornas spec. vikter, om man får antaga, att vätskorna blandas utan kontraktion?* *S. Wigert.*

De båda vätskornas spec. vikter efter den n:te operationen äro resp. e_n' och e_n''. Enär summan av vätskornas vikter är invariant, blir $Ve_n' + Ve_n'' = Ve' + Ve''$; alltså $e_n' + e_n'' = e' + e''$. Sedan man första gången hällt volymen v av första vätskan i den andra, äro de spec. vikterna resp. e' och e_1''. Av samma skäl som nyss är då $e'(V-v) + e_1''(V+v) = e'V + e''V$, varur fås $e_1'' = \frac{e'v + e''V}{V+v}$. Alltså blir $e_1' = e' + e'' - e_1'' = \frac{e'V + e''v}{V+v}$. Genom subtraktion av dessa uttryck fås $e_1' - e_1'' = (e' - e'') \cdot \frac{V-v}{V+v}$. Successivt användande av denna relation ger $e_2' - e_2'' = (e' - e'') \cdot \left(\frac{V-v}{V+v}\right)^2$; ..... $e_n' - e_n'' = (e' - e'') \cdot \left(\frac{V-v}{V+v}\right)^n$. Om kvoten $\frac{V-v}{V+v}$ betecknas med q, har man alltså ekvationerna:

$$e_n' + e_n'' = e' + e''; \; e_n' - e_n'' = q^n(e' - e'')$$

vilka ge

$$e_n' = \frac{1}{2}[e'(1+q^n) + e''(1-q^n)]; \; e_n'' = \frac{1}{2}[e'(1-q^n) + e''(1+q^n)].$$

B—r.

485) *En sfär går genom ett av hörnen O till en parallellipeped med diagonalen OF. Sfären skär de från O utgående kantlinjerna OA, OB och OC i A_1, B_1 och C_1 resp. samt OF i F_1. Visa att*

$$OF \cdot OF_1 = OA \cdot OA_1 + OB \cdot OB_1 + OC \cdot OC_1.$$

Projiceras den brutna linjen $OAEF$ ($OAEB$ är en pg) och diagonalen OF på sfärens diameter OO_1, så erhålles

$$OF\cos(OO_1, OF) = OA\cos(OO_1, OA) + \\ + AE\cos(OO_1, OB) + EF\cos(OO_1, OC)$$

eller, eftersom trianglarna OFO_1, OA_1O_1, OC_1O_1 äro rätvinkliga och $AE = OB$, $EF = OB$,

$$OF\cdot\frac{OF_1}{OO_1} = OA\cdot\frac{OA_1}{OO_1} + OB\cdot\frac{OB_1}{OO_1} + OC\cdot\frac{OC_1}{OO_1}$$

eller $$OF\,.\,OF_1 = OA\,.\,OA_1 + OB\,.\,OB_1 + OC\,.\,OC_1.$$

S. B. Även löst av *B*—*r*.

486) *En given cirkel har sin medelpunkt på axeln till en medelst topp och brännpunkt definierad parabel. Konstruera kurvornas skärningspunkter.* *X.*

Om den givna cirkelns (K) medelpunkt är M (m; 0), radie r, parabelns vertex V, fokus F och parameter $2p$, så fås ur systemet

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ (x-m)^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}\right\}$$

genom elimination

$$x^2 - 2(m-p)x + m^2 - r^2 = 0,$$

varav

$$\frac{x_1+x_2}{2} = m - p;\quad x_1x_2 = m^2 - r^2.$$

Vi skilja mellan två fall, allteftersom $m \leqq r$ och $m > r$. Konstruera punkten Q så, att $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{FV}$; $\because$ $VQ = m - p$. I första fallet tages Q till medelpunkt för en cirkel, som går genom K:s skärningspunkter L (och L_1) med vertextangenten. Denna cirkel skär axeln i P och P_1. Då är $VP\,.\,VP_1 = \overline{VL}^2 = r^2 - m^2$. Normalerna mot axeln genom P och P_1 innehålla de sökta punkterna.

I andra fallet lägges en cirkel genom K:s skärningspunkter A och B med axeln. Denna cirkel skär vertextangenten i L och L_1. Den cirkel genom L och L_1, som har sin medelpunkt på axelnormalen genom Q, utskär på axeln punkterna P och P_1. Normalerna mot axeln genom P och P_1 innehålla de sökta punkterna. Man har nämligen

$$m^2 - r^2 = VA\,.\,VB = VL\,.\,VL_1 = VP\,.\,VP_1.$$

X.

Resultat av pristävlan.

I tidskriftens decemberhäfte 1931 inbjödos eleverna vid de högre allmänna läroverken till en pristävlan, som bestod i att så fullständigt och vackert som möjligt lösa minst tre av fyra matematiska uppgifter.

Efter granskning av de inkomna tävlingsskrifterna ha utgivarna beslutat utdela följande pris.

Första priset, årg. I—XII av *Populär Astronomisk Tidskrift* i halvfranska band (gåva av Svenska Astronomiska Sällskapet) tilldelas Nils Svartholm, student vid Göteborgs högre latinläroverk v.t. 1932.

Andra priset, böcker till ett värde av 80 kronor (gåva av en av Tidskriftens gynnare), delas lika mellan Gunnar Lindgren och Lars-Gunnar Sillén, båda studenter å reallinjen v.t. 1932, den förre vid Malmö högre allm. lärov., den senare vid Östermalms högre allm. lärov. i Stockholm.

Tredje priset utdelas ej.

Extra pris, Tidskrift för elementär matematik etc. årg. 1932, tilldelades Anders Reiz, elev vid Uddevalla högre allm. läroverk.

Till tjänst för dem, som löst uppgifterna felaktigt eller ej gått i land med dem, meddelas här resultaten med lösningar.

1. Två regelbundna 8-hörningar med sidan s placeras så, att vardera har ett hörn i den andras centrum. Hur stor är den yta som 8-hörningarna ha gemensam?

Den ena 8-hörningen är $OABC\ldots$ med centrum i O_1, den andra $O_1A_1B_1C_1\ldots$ med centrum i O; A och A_1 ligga då på diagonalerna i kvadraten OB_1BO_1. OB och O_1B_1 råkas i N, AB och A_1B_1 råkas i M. Av lätt insedda skäl är

$$\text{fig. } OAMA_1O_1 = 2\Delta AON + \Delta ONO_1 + \text{fyrh. } AMA_1N.$$

Summan av de båda sista termerna kan ersättas med

$$\Delta ABN + \Delta A_1B_1N + \Delta BMB_1.$$

Av dessa trianglar äro de två första kongruenta med ΔAON; den tredje har samma yta som ΔAON, ty $\Delta BMB_1 \sim \Delta OAB$, och ytskalan är $\overline{BB_1}^2 : \overline{OB}^2 = 1 : 2$, varav $\Delta BMB_1 = \frac{1}{2} \cdot \Delta OAB = \Delta OAN$. Inalles får man alltså

$$\text{fig. } OAMA_1O_1 = 5 \cdot \Delta OAN \text{ och}$$

$$\text{den sökta ytan} = 5 \cdot \Delta OAB = \frac{5s^2\sqrt{2}}{4}.$$

Denna lösning är författad av problemställaren, *X*. De tävlande ha samtliga löst uppgiften genom räkningar, mer eller mindre vidlyftiga.

2. Bestäm de positiva vinklar $< 90°$, vilka satisfiera ekvationen

$$\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 4x \,.\, \cos 8x = \frac{1}{16}.$$

Ekvationen kan skrivas

$$\frac{\sin 2x}{2 \sin x} \cdot \frac{\sin 4x}{2 \sin 2x} \cdot \frac{\sin 8x}{2 \sin 4x} \cdot \frac{\sin 16x}{2 \sin 8x} = \frac{1}{16},$$

varav $$\sin 16x = \sin x$$

och $$16x = x + n \,.\, 360° \qquad 16x = 180° - x + n \,.\, 360°$$

$$x_1 = n \,.\, 24° \qquad x_2 = \frac{1}{17}(180° + n \,.\, 360°).$$

Svar: De sökta vinklarna äro $10°{,}59$; $24°$; $31°{,}76$; $48°$; $52°{,}94$; $72°$; $74°{,}12$.

Lösningen efter A. Reiz. N. Svartholm har generaliserat uppgiften och ger svaret till ekv.

$$\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 4x \,\ldots\, \cos 2^{n-1} \,.\, x = \frac{1}{2^n}.$$

3. I en triangel är en vinkel α; ρ_i och ρ_u äro radier i två cirklar, som tangera α:s båda vinkelben och därjämte den kring triangeln omskrivna cirkeln resp. innantill och utantill. Uttryck ρ_i som funktion av enbart α och r, ρ_u som funktion av enbart α och r_a, där r är radien i den i triangeln inskrivna cirkeln och r_a radien i den i α:s vinkelfält belägna vidskrivna cirkeln. Visa även, hur man genom konstruktion kan erhålla dessa cirklars medelpunkter.

Triangeln är ABC ($\sphericalangle A = \alpha$), vars omskrivna cirkel har radien R. Centra för cirklarna med radierna r och ρ_i äro resp. O och M. OE och MF äro två mot AB vinkelräta radier. Cirkeln M berör omskrivna cirkeln i P. PM och AM råka samma cirkel i Q och S resp. Enär $\sphericalangle BCS = \frac{\alpha}{2}$, blir $\sphericalangle SOC = \sphericalangle SCO = \frac{\alpha}{2} + \frac{C}{2}$ och $SO = SC = 2R \sin\frac{\alpha}{2}$. Enligt kordasatsen är

$$AM \,.\, MS = PM \,.\, MQ$$

eller $$AM \,.\, (SO - OM) = PM \,.\, MQ, \text{ varav}$$

$$\frac{\rho_i}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left(2R \sin\frac{\alpha}{2} - OM\right) = \rho_i(2R - \rho_i)$$

varav $$\frac{\rho_i}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot OM = \rho_i^2 \text{ eller } AM \cdot OM = F\overline{M}^2$$

$\because FO \perp AM$ (härav framgår omedelbart konstr.)

och $$FO = \rho_i \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}} \text{ eller } r = \rho_i \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

På samma sätt fås $$r_a = \rho_u \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Lösningen enl. N. Svartholm.

1. Ett klot »genomborras» av ett obegränsat prisma, vars tvärsnitt är en kvadrat med sidan a. Prismats axel går genom klotets medelpunkt, och a är lika med kantlinjen hos den i klotet inskrivna kuben. Hur stor volym har den del av klotet, som ligger utanför prismat?

Den sökta volymen V är sammansatt av två klotsegment med höjden $\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$ samt två »segment», tillhörande en klotskiva med tjockleken a. Men nu består klotet i sin helhet av, förutom den inskrivna kuben, sex sådana klotskivesegment, varför volymen av ett sådant segment $= \frac{1}{6}\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 - a^3\right]$. Enligt en känd formel för volymen av ett klotsegment erhålles alltså

$$V = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{a^2}{4}(\sqrt{3}-1)^2\left[\frac{3a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)\right] + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2} - a^3\right)$$

och efter förenkling

$$V = \frac{2\pi(\sqrt{3}-1)-1}{3} \cdot a^3.$$

Denna vackra lösning är förf. av N. Svartholm, som även löst uppgiften genom integration.

Insänd litteratur.

Fortschritte der Mathematik, Bd 56, Heft 1 (Jahrg. 1930) och *Revue semestrielle des publications mathématiques*, Jahrg. 1932, nr 2. Walter De Gruyter, Berlin 1932.

Jakob Jensen, *Praktisk Matematik.* Lærebog for sproglige Gymnasier. J. Gjellerups Forlag, København 1932, 174 sid., kr. 8: —.

Iwan Bolin och Bror Gustaver, *Kemi* för gymnasiet. Tidens förlag, Stockholm 1932 (se sid. 172).

Agne Wahlgren, *Apollonios' tre första böcker om kägelsnitten.* Seelig, Stockholm 1932 (se sid. 167).

C. E. Sjöstedt, *Projektiv geometri.* Särtryck ur redogörelse för Högre allm. lärov. i Östersund 1931—32, 85 sid., kr. 2: —.

C. E. Sjöstedt, *Geometriska övningsuppgifter och lösningsmetoder.* Wisénska bokhandeln, Östersund, 1932, 38 sid., kr. 0: 90.

Hagström-Witt, *Matematiska uppgifter i studentexamen för realgymnasiet.* Upplaga 1932. Henrik Carlsons Bokhandel, Linköping, 85 sid., kr. 1: 25.

Hedström-Öije, *Aritmetik och ekvationslära B.* För fyraåriga realskolor m. fl.; 3:e uppl. Sv. Bokförlaget (Bonniers), 1932, 178 sid., kr. 3: —, facit 25 öre.

J. A. Joh:son Inghe, *Geologi,* 7:e uppl. Sv. Bokförlaget (Bonniers) 1931, 58 sid., kr. 1: 50.

C. G. Hellsten, *Fysik och astronomi* II, 6:e uppl. Sv. Bokförlaget (Norstedt) 1932, 126 sid., kr. 1: 75.

Rydén-Norgren, *Folkskolans räknebok V.* Andra uppl. Sv. Bokförlaget (Norstedt) 1932, 96 sid., 70 öre.

Hj. Olson, *Algebra för latingymnasiet*, Första delen. Andra uppl. Sv. Bokförlaget (Norstedt), 1932, 87 sid., kr. 2: 60.

Frans Nilsson, *Stereometriska räkneexempel,* 5:e uppl. Sv. Bokförlaget (Norstedt) 1932, 15 sid., 40 öre.

Rydberg-Wahlström, *Uppgifter i fysik i studentexamen,* 12:e uppl. Sv. Bokförlaget (Norstedt) 1932, 134 sid., kr. 2: 25.

Moll-Rudberg, *Lärobok i fysik II,* Värmelära. 10:e uppl. Sv. Bokförl. (Norstedt) 1932, 88 sid., kr. 2: —.

Från kunskapens fält. Ernst Herlin, *Från eldborren till tändstickan* (64 sid.); A. Viksten, *Med timret från skogarna till havet* (63 sid.); Carl Skottsberg, *Hawaii-öarna* (61 sid.). Sv. Bokförlaget (Norstedt) 1932, 80 öre pr del.

Rendahl-Wahlström-Frank, *Räknebok för realskolan.* Första delen. A. För den femåriga realskolans två första klasser. Andra uppl. Sv. Bokförlaget (Norstedt) 1932, 115 sid., kr. 2: 50 (inkl. facit).

Ruben Mattson, *Lärobok i geometri* för realskolans och kommunala mellanskolans högsta klass. Andra uppl. Sv. Bokförlaget (Norstedt) 1932, 44 sid., kr. 1: 20.

Ivar J:son Malmborg, *Övnings- och lärobok i fysik för realskolan.* Andra årskursen. Sjätte omarbetade och tillökade uppl. Sv. Bokförlaget (Norstedt) 1932, 80 sid., kr. 1: 75.

Moll-Starck, *Lärobok i kemi för realgymnasiet.* Tredje delen. Kursen i kemi för 4:de ringen av det 4-åriga gymnasiet. Sv. Bokförlaget (Norstedt) 1932, 90 sid., kr. 2: 40.

Irving Langmuir.

Nobelpristagare i kemi.

Då Vetenskapsakademien den 10 november 1932 tilldelade Irving Langmuir 1932 års Nobelpris i kemi för hans upptäckter och undersökningar på ytkemiens område, gav den sitt erkännande åt ett 20-årigt synnerligen framgångsrikt pioniärarbete inom den fysikaliska kemien.

Langmuir föddes 1881 i Brooklyn. Den första undervisningen i kemi erhöll han av sin äldre broder A. C. Langmuir, som i sitt hem, där den femtonårige Irving då vis-

tades, inrättade ett litet laboratorium för broderns räkning. År 1903 utgick han från Columbia University såsom Metallurgical Engineer och tillbringade därefter tre år hos Nernst i Göttingen, där han erhöll doktorsgraden. Efter återkomsten till Amerika anställdes han 1906 som lärare vid Steven's Institute of Technology men knöts redan 1909 till General Electric Company's forskningslaboratorium i Schenectady, där han alltjämt har sin verksamhet.

Redan 1912 framträdde Langmuir med den teori för adsorptionsfenomenet, som i huvudsak har varit vägledande vid hans senare arbeten inom detta område. Langmuir insåg från början, att villkoret för en framgångsrik bearbetning av det stora fenomenkomplex, som innefattas i begreppet adsorption, låg i ett studium av möjligast renodlade fall av ytkemiska elementarprocesser. Det lyckades honom också att genom en rad originella och utomordentligt skickligt genomförda försök studera dylika fall och därigenom erhålla bekräftelse på sina antaganden.

Enklast ter sig problemet vid studiet av gränsytan mellan en fast kropp och en gas, där den fasta kroppen antages hava en så jämn yta som möjligt. Vid de adsorptionsmätningar, som utförts före Langmuirs undersökningar, hade i allmänhet porösa kroppar med svårdefinierbar yta begagnats, varvid hela fenomenet avsevärt komplicerats. — Langmuirs tankegång var den att gasadsorptionen på ytan av den fasta kroppen huvudsakligen är en följd av de på kroppens yta uppträdande omättade valenskrafterna. De valenskrafter, som hålla atomerna samman i det fasta förbandet, äro i en kropps inre fullständigt mättade, men på kroppens yta, där atomerna ej allsidigt omgivas av grannar, måste vissa utåtriktade valensriktningar förbli omättade och genom sin strävan att binda de omgivande gasmolekylerna orsaka adsorption av gasen. Genom att alltså endast ett begränsat antal omättade valensriktningar står till buds, kan endast ett bestämt antal gasmolekyler bindas direkt till den fasta kroppen, och Langmuir antager, att i allmänhet ad-

sorptionen avstannar, när alla de fria valenskrafterna tagits i anspråk. Detta inträffar i allmänhet innan ytan blivit helt täckt av gasen och följden blir alltså den att det adsorberade skiktet endast innehåller ett lager gasmolekyler, d. v. s. blir monomolekylärt. Är den fasta kroppen kristalliserad, utgå valenskrafterna från regelbundet ordnade gitterpunkter, varigenom även de adsorberade molekylerna eller atomerna bli regelbundet ordnade.

Undersökningar av adsorptionen av gaser under lågt tryck på plana ytor av platina, glimmer och glas samt på glödlampstrådar av molybden och wolfram visade, att Langmuirs uppfattning av adsorptionsmekanismen var riktig. I alla dessa fall kunde nämligen den adsorberade gasmängden förklaras under förutsättning av utbildandet av ett monomolekylärt gasskikt. Generelit syntes detta dock endast gälla, då gastrycket var avsevärt lägre än den mättade gasens tryck vid temperaturen i fråga. Närmade man sig kondensationspunkten, ökades tendensen till utbildandet av tjockare skikt. Nyare undersökningar, bl. a. av Frazer, ha dock visat, att på fullständigt plana ytor även mättade ångor kunna adsorberas monomolekylärt.

På senare tid har adsorptionsproblemet studerats med hjälp av helt nya metoder, och resultaten hava i allmänhet givit synnerligen vackra belägg för Langmuirs åsikter. Sålunda ha exempelvis undersökningar av elektroninterferenser från vätgasbehandlade ytor av nickelkristaller givit vid handen, att väteatomerna i det adsorberade gasskiktet äro fördelade på ett regelbundet sätt. De bilda med andra ord ett tvådimensionellt gitter ovanpå nickelytan. Byggnaden hos detta gitter står i en bestämd relation till det underliggande nickelgittret, vilket tydligt visar, att detta senare utövat en reglerande inverkan på de adsorberade väteatomerna.

Även Langmuir själv har på allra sista tiden utarbetat nya metoder för studiet av adsorptionsmekanismen, vilka synas mycket lovande. Han har därvid undersökt adsorp-

tionen av cesiumatomer på wolframtrådar av varierande temperatur och har på grundval av cesiums ringa joniseringspotential utarbetat en synnerligen elegant metod för bestämningen av mängden av de på glödtråden adsorberade atomerna.

Langmuirs erfarenheter vid undersökningarna av adsorptionen på glödlampstrådar ha blivit av den allra största betydelse för glödlampstekniken. Det hos en glödlampa småningom uppträdande och för ljusutbytet synnerligen menliga metallbeslaget på glasets insida ansågs tidigare huvudsakligen bero på en sublimation av glödtråden till den kallare väggen, men Langmuir kunde visa att huvudorsaken var spår av vatten, vilka ej fullständigt avlägsnats vid evakueringen. Vid beröring med den heta glödtråden dissocieras vattnet i väte och syre, och Langmuir kunde dessutom påvisa, hurusom vätemolekylerna under inverkan av elektronemissionen från glödtråden dissocierades till atomärt (aktivt) väte. Syret adsorberas snart på glödtråden, varigenom elektronemissionen nedsättes och bildningen av väteatomer upphör. Sedan wolframtråden fullständigt täckts med syre, föranleda ytterligare syremolekyler, som träffa tråden, bildandet av wolframtrioxid, WO_3, som på grund av sin flyktighet sublimerar över till lampans vägg. Då allt syre i lampan blivit förbrukat, börja på grund av WO_3-bortgången från tråden, bara partier att uppstå på denna, varvid elektronemissionen betydligt ökas. Härigenom bildas atomärt väte, som reducerar wolframtrioxiden på lampväggen till wolfram under vattenbildning. Processen kan alltså återigen upprepas på samma sätt och resultatet blir följaktligen, att en ytterst ringa vattenmängd kan överföra obegränsade mängder av glödtråden till glasväggen. Langmuir fann vid fortsatta försök, att wolframtrådens avdunstning reducerades mest effektivt, om lampan fylldes med en absolut torr, inaktiv gas, exempelvis kväve.

Langmuirs forskningar inom ytkemien ha även berört ett annat område, nämligen gränsskikten mellan en vätska och

en gas samt framför allt strukturen hos de monomolekylära hinnor, som kunna bildas i dylika gränsskikt. Redan Lord Rayleigh hade vid studier av ytspänningen hos på vatten utbredda oljehinnor påvisat diskontinuiteter, vilka uppträdde, när hinnan kunde antagas bestå av ett enda skikt tätt packade oljemolekyler. Devaux redogjorde 1913 för liknande undersökningar och framlade den åsikten, att dylika monomolekylära hinnor, beroende på omständigheterna, kunna betraktas som tvådimensionella gaser, vätskor eller fasta kroppar. Övertygande belägg för denna åsikt gavs först av Langmuir, sedan denne (1916) utarbetat en synnerligen enkel och bekväm metod för studiet av sådana hinnor. Metoden går ut på att undersöka ändringen i det av hinnan utövade sidotrycket vid variation av hinnans yta. Låter man en hinna utbreda sig fritt och därefter minskar dess yta genom att på lämpligt sätt skjuta den samman, håller sig sidotrycket till en början praktiskt taget konstant för att vid underskridandet av en viss kritisk ytstorlek hastigt stiga. För högre, mättade fettsyror och alkoholer var denna kritiska ytstorlek konstant = 20,5 Å^2 per molekyl, oberoende av kolkedjans längd. Langmuir förklarade detta faktum därigenom, att kolkedjorna, när hinnorna blivit komprimerade till det kritiska värdet, ställt sig parallellt och riktade från vattenytan, så att de alla intaga samma yta i horisontalplanet, oberoende av antalet kolatomer i kedjan. Till denna orientering av molekylerna bidrager den polära alkohol- eller karboxylgruppens strävan att ställa sig i kontakt med vattenytan. Värdet 20,5 Å^2 skulle då motsvara kolkedjans genomskärningsarea parallellt med vattenytan. Langmuir antog till en början, att kolkedjorna voro riktade vinkelrätt mot den underliggande vattenytan. Emellertid har senare genom röntgenundersökningar på kristaller av ifrågavarande fettsyror och alkoholer visats, att genomskärningsarean vinkelrätt mot kolkedjans längsta utsträckning endast är 18,3 Å^2. Antager man emellertid, att de parallellorienterade kolkedjorna bilda en vinkel av unge-

får 27° med vattenytan erhålles värdet 20,5 Å^2 för arean parallellt med vattenytan. Detta antagande stödes därav att de parallellorienterade kolkedjorna i vissa kristalliserade fettsyror enligt röntgenundersökningar bilda just denna vinkel med det plan på vilket de kunna tänkas ställda. Molekylernas inbördes läge i de till tätpackning sammanpressade monomolekylära skikten skiljer sig i dessa fall tydligen föga från deras inbördes läge inom en kristall.

Är den tillgängliga fria vätskeytan större än vad som motsvarar tätpackning av molekylerna, sänka sig kolkedjorna ned mot underlaget så långt utrymmet tillåter, så att de slutligen vid tillräckligt stor yta ligga utsträckta på vattenytan. Langmuir ansåg att, vid tillräckligt stor ytutbredning, dylika hinnor, i vilka alltså molekylerna kunna röra sig fritt i två dimensioner, vore att förlikna med tvådimensionella gaser. Han förutsåg också möjligheten av en övergång mellan denna tvådimensionella gas och den starkt komprimerade hinnan, analog med övergången från en tredimensionell gas till en tredimensionell vätska. Förefintligheten av dylika övergångar har sedermera konstaterats genom ingående experiment av N. K. Adam, som därvid begagnade sig av principiellt samma metodik som Langmuir. Adam fann, att tryck-ytisotermerna för stora ytor per molekyl i hög grad likna tryck-volymsisotermerna för tredimensionella vätskor och gaser. Om temperaturen understiger ett visst, för varje substans karakteristiskt värde, motsvarande den kritiska temperaturen för en tredimensionell gas, uppvisa isotermerna vid ytans variation mellan vissa gränser ett konstant tryckvärde (= »ångtrycket» för den mättade tvådimensionella gasen vid temperaturen i fråga), i fullständig analogi med tryck-volymsisotermernas förlopp inom tvåfasområdet hos tredimensionella gas-vätskesystem. Det har även visat sig möjligt att för dessa tvådimensionella gaser uppställa tillståndsekvationer analoga med tillståndsekvationerna för tredimensionella gaser.

Langmuirs undersökningar över adsorption och mono-

molekylära skikt ha givetvis även haft stor betydelse för åtskilliga problem, som stå i samband med dessa fenomen. Så är exempelvis fallet med den heterogena katalysen, där åtminstone vissa effekter ha kunnat framgångsrikt tolkas under antagande av monomolekylär adsorption. Monomolekylära skikt i vätskeytor äro säkerligen mycket väsentliga för de smörjande egenskaperna hos flytande smörjmedel. Langmuirs uppfattning om strukturen i dylika ytskikt har dock hittills ej fått någon direkt praktisk betydelse för smörjningsproblemen. Likaledes bidraga de Langmuirska teorierna i hög grad till förståelsen av de ytspänningsfenomen på vilka malmsepareringen enligt flotationsmetoden grundar sig.

Föreliggande redogörelse för Langmuirs insatser inom vetenskap och teknik vore ofullständig om ej även några av hans arbeten på områden liggande mera fjärran från den rena ytkemien omnämndes. Hans bidrag till utvecklingen av de moderna radiorören står givetvis i samband med hans redan berörda undersökningar över elektronemissionen liksom den av honom utarbetade metoden för svetsning medelst atomärt väte torde leda sitt ursprung från hans glödlampsundersökningar. Fullständigt fristående äro däremot de åsikter rörande kemisk valens och bindning, som han omkring 1920 utvecklade med utgångspunkt från G. N. Lewis' elektronparteori. Även om dessa åsikter numera äro fullständigt föråldrade voro de vid tiden för framförandet ej utan en viss betydelse. De äro dock huvudsakligen att betrakta som en mera formell precisering av Lewis' teorier, där åtskilligt av smidigheten i dessa senare gått förlorad.

Gunnar Hägg.

Om heltalsvärden på sidor och diagonaler i en parallellogram.

Av C. A. MEBIUS.

1. I första häftet av denna tidskrift för 1932 (Årg. 15, sid. 26) har rektor J. S. HEDSTRÖM angivit en metod att finna rationella värden på sidor och diagonaler i en pg. Härmed meddelar jag en annan metod, genom vilken man lätt kan erhålla talrika lösningar av uppgiften.

2. Låt a och b vara talvärdena på sidorna samt x och y på diagonalerna i en pg. Av diagonalsatsen erhålles då

$$2\,a^2 + 2\,b^2 = x^2 + y^2. \qquad (1)$$

Multipliceras båda leden med n^2, fås

$$2\,(na)^2 + 2\,(nb)^2 = (nx)^2 + (ny)^2. \qquad (2)$$

Om således a, b, x, y är ett system av värden, som satisfierar (1), så är na, nb, nx, ny ett annat. Då n är ett tal vilket som helst, kan man ur en lösning till (1) härleda huru många andra som helst (likformiga pg), och om a, b, x, y äro rationella tal, kan härledas en lösning med hela tal, varvid n är bråkens minsta gemensamma nämnare. Hava dessa hela tal en gemensam faktor, kan denna tydligen bortdivideras.

Uppgiften kan därför formuleras så, att man skall finna 4 hela tal utan gemensam faktor, vilka satisfiera (1).

3. Man har identiskt

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2\,a^2 + 2\,b^2;$$

således är

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = x^2 + y^2. \qquad (3)$$

Lösningen $x = a + b$, $y = a - b$, satisfierar visserligen (1), men uppfyller icke de geometriska villkoren

$$a + b > x > a - b \text{ och } a + b > y > a - b. \qquad (4)$$

Vi skriva därför (3) under formen

$$(a + b)^2 - x^2 = y^2 - (a - b)^2$$

eller

$$(a + b + x)\,(a + b - x) = (y + a - b)\,(y - a + b). \qquad (5)$$

Låt T vara ett sammansatt helt tal vilket som helst; vi uppdela det på två sätt i faktorer (ex. $6 \cdot 1 = 3 \cdot 2$) och skriva

$$T = \alpha\beta = \gamma\delta. \qquad (6)$$

Antages nu

$$\left.\begin{aligned} a + b + x &= \alpha, \quad y + a - b = \gamma, \\ a + b - x &= \beta, \quad y - a + b = \delta, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

är

$$\left.\begin{aligned} 4a = \alpha + \beta + \gamma - \delta;\ 4b &= \alpha + \beta - \gamma + \delta; \\ 2x = \alpha - \beta;\ 2y &= \gamma + \delta; \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

och dessa ekvationer bestämma fyra rationella tal, som satisfiera ekv. (1). Sätter man i (2) $n = 4$, så kan den identiska ekvationen skrivas

$$\left.\begin{aligned} 2\,(a + \beta + \gamma - \delta)^2 + 2\,(a + \beta - \gamma + \delta)^2 &= \\ = (2\,(\alpha - \beta))^2 + (2\,(\gamma + \delta))^2 & \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

med villkoret $\alpha\beta = \gamma\delta$.

Gemensamma faktorer i α, β, γ, δ äro också gemensamma för a, b, x, y; dessa hava också faktorn 2 gemensam, utom då tre av de hela talen, α, β, γ, δ äro jämna och ett udda.

4. Multipliceras båda leden i (1) med 2, erhålles

$$(2a)^2 + (2b)^2 = 2x^2 + 2y^2. \qquad (10)$$

Detta är en ekvation av samma typ som (1) och motsvarar en annan pg, vars sidor äro lika med den förstes diagonaler och vars diagonaler äro dubbelt så stora som den förstes resp. sidor.

Ur (9) erhålles för denna pg (efter division med 2)

$$2(\alpha-\beta)^2+2(\gamma+\delta)^2=(\alpha+\beta+\gamma-\delta)^2+ \\ +(\alpha+\beta-\gamma+\delta)^2, \tag{11}$$

vilken ekv. är identisk, om $\alpha\beta=\gamma\delta$.

Man har

$$\delta=\frac{\alpha\beta}{\gamma}; \tag{12}$$

insättes detta värde i (9) och (11), så erhållas efter multiplikation med γ^2 de båda ekvationerna

$$2[(\alpha+\beta+\gamma)\gamma-\alpha\beta]^2+2[(\alpha+\beta-\gamma)\gamma+\alpha\beta]^2= \\ =[2\gamma(\alpha-\beta)]^2+[2(\gamma^2+\alpha\beta)]^2 \tag{13}$$

och

$$2(\alpha-\beta)^2\gamma^2+2(\gamma^2+\alpha\beta)^2=[(\alpha+\beta+\gamma)\gamma-\alpha\beta]^2+ \\ +[(\alpha+\beta-\gamma)\gamma+\alpha\beta]^2, \tag{14}$$

vilka äro identiska, d. v. s. α, β och γ kunna hava vilka reella eller komplexa värden som helst oberoende av varandra.

De geometriska villkoren (4) för existensen av en pg äro i de båda allmänna fallen uppfyllda, om α, β, γ äro hela tal och

$$\alpha>\gamma>\beta>0.$$

Specialfall.

5. *Romb.* Då sidorna äro lika stora är enligt (9)

$$\alpha+\beta+\gamma-\delta=\alpha+\beta-\gamma+\delta,$$

således

$$\gamma=\delta,$$

och följaktligen talet T i (6) en jämn kvadrat.

Antages $\gamma=m.n$ och $m>n$, fås

$$T=m^2.n^2=(mn)(mn)$$

och alltså $a=b=m^2+n^2$; $x=2(m^2-n^2)$; $y=4mn$. (16)

6. *Rektangel.* Då diagonalerna äro lika stora, är enligt (11) på samma sätt som i föregående fall $\gamma = \delta$ och

$$a = m^2 - n^2;\ b = 2mn;\ x = y = m^2 + n^2. \qquad (17)$$

7. *En sida lika med en diagonal.* Antag i (11) t. ex.

$$\gamma + \delta = \alpha + \beta + \gamma - \delta,$$

alltså $$\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Då är $$\gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}.$$

Man väljer till en början α och β efter behag; sedan man beräknat de preliminära värdena $a_1 = \alpha - \beta$, $b_1 = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha+\beta}{2} = x_1$, $y_1 = \frac{3(\alpha+\beta)}{2} - \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, multipliceras dessa värden med $2(\alpha+\beta)$, och man får sålunda under heltalsform

$$\begin{aligned} a &= 2(\alpha^2 - \beta^2);\ b = 4\alpha\beta + (\alpha+\beta)^2 = x; \\ y &= 3(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 2(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2. \end{aligned} \qquad (19)$$

Villkoren (4) äro uppfyllda, om $\alpha > \beta > 0$.

8. Den frågan erbjuder sig, huruvida sidornas (eller diagonalernas) talvärden kunna vara vilka hela tal som helst, d. v. s. på förhand godtyckligt väljas. Att detta icke är fallet, framgår av specialfallen; ty i romben är talvärdet för sidan α och i rektangeln för diagonalen x lika med $m^2 + n^2$ summan av två (hela) tals kvadrater.

Försöker man i det allmänna fallet med t. ex. $a = 5$, $b = 3$, så kan x vara ett av de hela talen 3, 4, 5, 6, 7, och enligt (1) är då $y^2 = 59, 52, 43, 32, 17$. Intet av dessa är en jämn kvadrat. Det är för övrigt uppenbart, att en sådan form som $(\alpha + \beta + \gamma)\gamma - \alpha\beta$, där α, β, γ äro hela positiva tal, definierar en viss klass av hela tal och icke ett helt tal vilket som helst.

Parallellaxiomet för en yta av ändlig utsträckning.

Av HENRIK PETRINI.

En olägenhet med den vanliga framställningen av elementargeometrin är den, att den vid härledning av satser om figurer av ändlig utsträckning bygger på parallellaxiomet, som förutsätter det antagandet, att planet kan utsträckas i oändlighet, ett antagande som inte har något med ändliga figurer direkt att skaffa. Användningen av parallellaxiomet innebär således en onödig omväg, som man borde kunna undvika genom att i stället använda ett annat axiom lika bärkraftigt, men ej innehållande något onödigt antagande. Härigenom undvikes, att lärjungen får den vanföreställningen, att det är en självklar sak, att planet och den räta linjen kunna dragas ut i oändlighet, något som ju strider mot vissa moderna fysiskt-matematiska teorier.

Ett enkelt sätt att ersätta parallellaxiomet är att i stället antaga, att vinkelsumman i varje triangel är lika med två räta vinklar. Denna sats besitter den förtjänsten framför parallellaxiomet, att den kan verifieras empiriskt, varigenom lärjungen redan från början kan lägga den synpunkten därpå, att den gäller med den noggrannhet, som experimenten ha. Då blir han inte förbryllad, när han får höra talas om möjligheten att experimentellt bestämma värdsalltets storlek och dylikt. I alla händelser står denna omformulering av axiomet i ett mera direkt samband med de egenskaper hos geometriska figurer, som med dess tillhjälp skola härledas.

Definitionen på parallella linjer måste då ändras så, att inte den heller förutsätter antagandet av planets utsträckning i oändlighet.

Definition: Om två räta linjer skäras av en tredje så, att alternatvinklarna bli lika stora, så sägas de båda linjerna vara parallella.

Av satsen om vinkelsumman i en triangel följer nu omedelbart, att om en annan skärande linje drages genom den ena (P i fig. 1) av de givna skärningspunkterna, så bli även nu alternatvinklarna lika stora. Ty antag enl. def. $\alpha = \alpha_1$. Enligt axiomet om vinkelsumman i en triangel är $\beta = \alpha + \gamma, \therefore \beta = \alpha_1 + \gamma$. Härav fås omedelbart den allmänna satsen om parallella linjer:

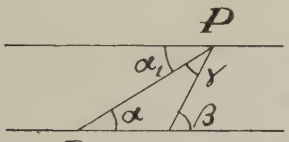


Fig. 1.

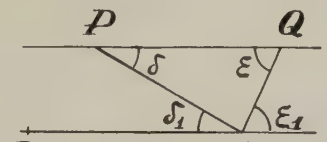


Fig. 2.

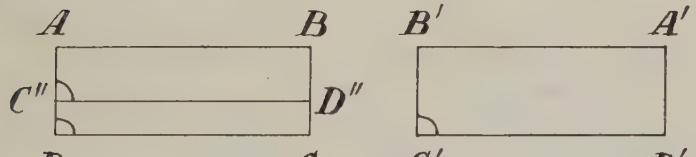


Fig. 3.

Om en rät linje skär två parallella räta linjer (i Q och Q_1 fig. 2), så bli alternatvinklarna lika stora. Ty enligt föregående sats är $\delta = \delta_1$, och då blir också enligt samma sats alternatvinklarna ε och ε_1 vid Q_1 Q lika stora.

Den vanliga formuleringen av parallellaxiomet lyder: från en yttre punkt kan man draga en och endast en rät linje parallell med en given rät linje. Nu kan man lätt bevisa, att om detta gäller för *en* punkt och *en* rät linje i planet, så gäller det för alla punkter och alla räta linjer i planet. Likaså kan man bevisa, att om det finnes *en* triangel, vars vinkelsumma är $2\,R$, så gäller detta om alla trianglar.

Beviset för denna sista sats kan göras utan antagandet att

planet kan utsträckas hur långt som helst. Emellertid blir beviset något enklare för motsvarande sats om rektanglar, varur den förutnämnda satsen om trianglar sedan omedelbart härledes.

Sats 1. Om i en fyrhörning ABCD (fig. 3) *alla vinklar äro lika stora, så äro motstående sidor lika stora.*

Anm. Vid bevisen gälla de satser i Eukl. I, som inte förutsätta parallellaxiomet.

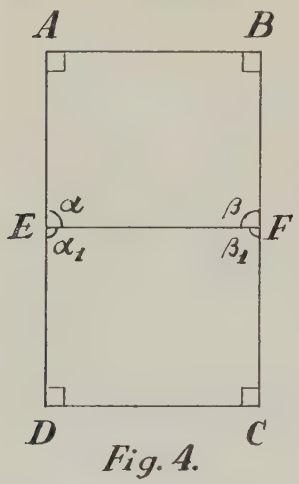


Fig. 4.

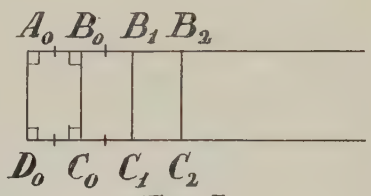


Fig. 5.

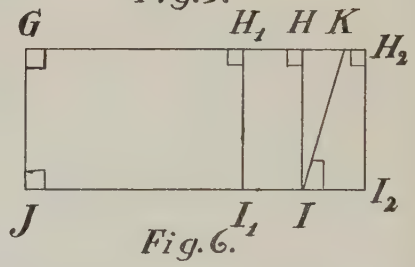


Fig. 6.

Figuren lägges om i läget $B'A'D'C'$ och flyttas tillbaka så, att vinkeln B' sammanfaller med vinkeln A. Då faller punkten A' i B. Om nu BC vore $< AD$, så fölle C' *i* C'' mellan punkterna A och D. Emedan $\angle C' = \angle D$, så kan $C''D''$ inte skära DC; $\therefore D'$ faller i D'' emellan B och C. Då är $BC > BD'' = A'D' = AD$; $\therefore BC > AD$, vilket strider mot antagandet, etc.

Sats 2. Om det existerar en enda rektangel (d. v. s. fyrhörning, vars alla vinklar äro räta), *så kan man konstruera en rektangel, där två närliggande sidor äro lika med två givna sträckor resp.*

1:o. Antag, att $ABCD$ (fig. 4) är en rektangel. Dela AD och BC mitt itu i E och F resp. och lägg figuren AF på DF

så, att AB sammanfaller med DC. Då bli figurerna kongruenta; $\therefore \alpha_1 = \alpha; \therefore \alpha = R$ och p. s. s. $\beta = R; \therefore AF$ är en rektangel.

Upprepas förfarandet r gånger, får man en rektangel, där en sida är $\frac{1}{2^r}$-delen av AD. På samma sätt fås en rektangel, där även den andra sidan blir förminskad och $= \frac{1}{2^s}$-delen av AB, där s är ett godtyckligt helt tal.

2:o Låt $A_0B_0C_0D_0$ (fig. 5) vara en sådan rektangel. Drag ut A_0B_0 och D_0C_0 och gör $B_0B_1 = A_0B_0$ samt $C_0C_1 = D_0C_0$. Då blir $B_0C_1 \cong A_0C_0; \therefore A_0C_1$ är en rektangel. Denna konstruktion kan upprepas.

På samma sätt förfares med sidorna A_0D_0 och B_0C_0.

Man får alltså en rektangel, där sidorna äro $\frac{p}{2^s}$-falden av AB och $\frac{q}{2^r}$-falden av AD, om $ABCD$ är den ursprungligen givna rektangeln och p, q, r, s äro godtyckliga hela tal.

3:o Låt $GHIJ$ (fig. 6) vara en fyrhörning, där vinklarna J, G och H äro räta, $GJ = AD$ och GH godtycklig.

Man kan alltid taga s så stort, att $\lambda = \frac{1}{2^s}$-delar av AB (fig. 4) blir $<$ en godtyckligt liten given sträcka σ, och mäta upp GH i denna enhet, så att $p\lambda \leqq GH < (p+1)\lambda$, där p är ett ändligt helt tal.

Gör $GH_1 = p\lambda$, $GH_2 = (p+1)\lambda, \therefore H$ faller emellan H_1 och H_2 och $H_1H_2 = \lambda < \sigma$. Dragas H_1I_1 och $H_2I_2 \perp GH_2$ så faller I mellan I_1 och I_2. Då är enligt 2:o H_1I_2 en rektangel.

Då man inte vet, om $\angle I = R$, så drages $IK \perp JI$. Då måste K falla mellan H_1 och H_2, ty vinklarna vid I_1 och I_2 äro nyss bevisade vara vardera $= R$, så att IK varken kan råka I_1H_1 eller I_2H_2. Men genom att välja s tillräckligt stort kan man göra H_1H_2 hur litet som helst, således faller punkten K hur nära H som helst, vilket betyder, att K sammanfaller med $H; \therefore$ GI är en rektangel.

4:o En fyrhörning med en sida $= GH$, en närliggande

sida godtycklig och de tre närliggande vinklarna räta bevisas på samma sätt vara en rektangel.

Sats 3. Om det existerar en enda rektangel, så är vinkelsumman i varje triangel $= 2\,R$.

Från (den största) vinkelns spets C i en given triangel ABC (fig. 7) drages höjden CD, och genom C drages en rät linje $ECF \perp CD$. Vidare dragas AE och $BF \perp AB$.

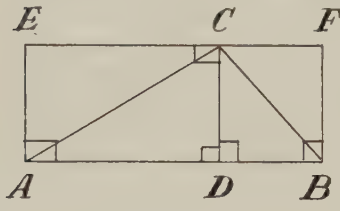


Fig. 7.

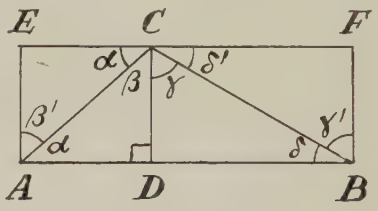


Fig. 8.

Enligt antagandet och sats 2 blir DE en rektangel; $\because \angle E = R$. P. s. s. är $\angle F = R$. Enligt sats 1 är $AE = DC$ och $EC = AD$; $\because \triangle AEC \cong CDA$; $\because$ vinkelsumman i $\triangle ACD = 2R$. P. s. s. är vinkelsumman i $\triangle CDB = 2R$; $\because$ vinkelsumman i $\triangle ABC = 2R$.

Sats 4. Om vinkelsumman i en enda triangel är $= 2\,R$, *så är vinkelsumman i varje triangel* $= 2\,R$.

Vinkelsumman i $\triangle ABC$ (fig. 8) antages vara $= 2\,R$. Från den största vinkelns spets C drages höjden CD. Då är $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\,R$.

Avsätt $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$ och $\delta' = \delta$.

Då blir enligt antagandet ECF en rät linje. Småtrianglarna äro parvis kongruenta (3:e kongr. fallet); $\because \angle E = R = \angle F$, $EA = CD = FB$, $AD = EC$ och $DB = CF$; $\because AB = EF$. Figuren AF är alltså en fyrhörning, där motstående sidor äro lika stora, och den kan alltså delas upp genom en diagonal (ej dragen i figuren) i två kongruenta trianglar (2:a kongr. fallet), varav fås, att motstående vinklar äro lika stora; $\because \angle A = \angle F = R$ och $\angle B = \angle E = R$. Alltså är AF en rektangel, och således är vinkelsumman i alla trianglar $= 2\,R$ (sats 3).

Prismoidformeln.

Av STURE NYDELL.

I.

Vi utgå från en kropp begränsad av två parallella plan på avståndet h från varandra. Kroppen antages vidare vara så beskaffad, att ett snitt lagt genom densamma parallellt med basytorna skär ut en yta, vars storlek angives av följande funktion

$$B = \sum_{0}^{n} a_k x^k,$$

där x betyder snittets avstånd från ena basplanet.

Genom integrering erhålles kroppens volym V.

$$V = \int_{0}^{h} B dx = \frac{a_n h^{n+1}}{n+1} + \ldots + \frac{a_1 h^2}{2} + a_0 h,$$

$$\therefore \frac{V}{h} = \frac{a_n h^n}{n+1} + \ldots + \frac{a_1 h}{2} + a_0.$$

I stället för $a_0, a_1 \ldots a_n$ införa vi ett annat system, nämligen, förutom basytorna, snittytor delande höjden i ett visst antal lika stora delar. Det visar sig då, att för $n = 3$ erfordras för framställning av $\frac{V}{h}$ endast *en* snittyta,[1] nämligen den, som delar höjden mitt itu, det s. k. mittsnittet B_m jämte de båda basytorna B och b. De fyra storheterna a_0,

[1] Under förutsättning att snittytorna skola ligga på lika avstånd från varandra, är det endast, när n är udda, möjligt att utbyta storheterna $a_0 \ldots a_n$, till antalet $(n+1)$ stycken, mot endast n stycken snittytor (häri inräknat basytorna). Se utförligare härom i II.

a_1, a_2 och a_3 ha sålunda i detta fall kunnat utbytas mot endast *tre*, B, b och B_m, utan att värdet på $\frac{V}{h}$ förändrats.

Härigenom erhålles den s. k. prismoidformeln, som med användning av ovanstående beteckningar lyder:

$$V = \frac{h}{6}(B + b + 4B_m).$$

Denna formel gäller för alla kroppar, belägna mellan två parallella plan, och så beskaffade, att snitt parallella med dessa plan utskära ytor, vilkas storlek kan framställas som polynom av högst 3:dje graden av deras avstånd från ena basplanet. På grund härav kan den användas för beräkning av volymen hos alla prismatiska, pyramidaliska och sfäriska kroppar.

Prismoidformeln utgör ett specialfall av Simpsons regel. Enligt denna blir volymen

$$\frac{h}{6n}[B_0 + 4(B_1 + B_3 + \ldots + B_{2n-1}) + 2(B_2 + B_4 + \ldots + B_{2n-2}) + B_{2n}],$$

där B_0 och B_{2n} betyda de plana begränsningsytorna och $B_1, B_2 \ldots B_{2n-1}$ äro snittytor delande höjden h i $2n$ lika stora delar.

Om $2n = 2$ övergår ovanstående formel till prismoidformeln.

Tillämpningar. Som exempel på prismoidformelns användning välja vi härledningen av formlerna för volymen hos pyramiden, sfären och tunnan samt två praktiska uppgifter.

1. Pyramiden: $B = B$; $b = 0$; $B_m = \frac{B}{4}$.

$$V = \frac{h}{6}\left(B + 4\frac{B}{4}\right) = \frac{Bh}{3}.$$

2. Sfären: $B = b = 0$; $B_m = \pi R^2$; $h = 2R$.

$$V = \frac{2R}{6} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

3. Tunnan: Om diametern upptill och nedtill antages vara d samt mittsnittsdiametern D, erhålles

$$V = \frac{h}{6}\left(\frac{\pi d^2}{4} + \frac{\pi d^2}{4} + \frac{4\pi D^2}{4}\right) = \frac{\pi h}{12}(d^2 + 2D^2).$$

Denna formel är exakt eller approximativ beroende på arten av krökningen hos tunnans kantlinje. Om denna exempelvis är elliptisk, är formeln exakt, är den parabolisk, är formeln endast approximativ.

4. En byggnad av rektangulär form, 16 m × 10 m, är försedd med ett s. k. valmtak (fig. 1), vars alla sidoytor luta 45° mot horisontalplanet. Beräkna vindsutrymmet under taket.

Svar: $316\frac{2}{3}$ m³.

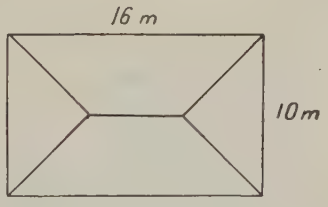


Fig. 1.

5. Hur många m³ betong erfordras till utfyllandet av 20 stycken lika stora buckelformade fördjupningar (se skiss fig. 2)? Dessa äro upptill rektangulära med sidorna $2a = 66$ cm, $2b = 100$ cm och djup $= h = 8$ cm samt kröka sig paraboliskt nedåt enligt de å skissen utritade parabelbågarna.

Anvisning: Om mittsnittets mått antages vara $2x$ och $2y$, blir

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

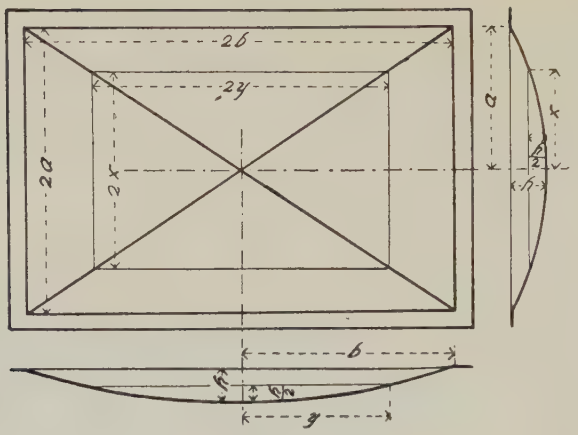


Fig. 2.

Svar: Varje fördjupnings volym 2abh. Erforderliga betongmängden till alla plattorna 0,528 m^3.

II.

Antag snittytan

$$B = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n,$$

där z räknas från mittsnittet, som sålunda tagits som nollplan. Vi vilja undersöka likheten

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} B dz = h\,(l_1 B_1 + l_2 B_2 + \ldots + l_n B_n) \qquad (1),$$

där vänstra ledet anger det exakta uttrycket för volymen och högra ledet framställer volymen medelst n stycken snittytor.

Snittytorna $B_1, B_2 \ldots B_n$ motsvara z-värdena z_1, $z_2 \ldots z_n$; l_1, $l_2 \ldots l_n$ äro av z oberoende koefficienter.

Efter integrationen blir vänstra ledet i ekv. (1)

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} B dz = a_0 h + \frac{a_2}{3} \cdot \frac{h^3}{2^2} + \frac{a_4}{5} \cdot \frac{h^5}{2^4} + \ldots .$$

Man har vidare

$$\begin{aligned} B_1 &= a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \ldots + a_n z_1^n, \\ B_2 &= a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_2^2 + \ldots + a_n z_2^n, \\ &- - - - - - - - - - - - \\ B_n &= a_0 + a_1 z_n + a_2 z_n^2 + \ldots + a_n z_n^n. \end{aligned}$$

Genom insättning av dessa uttryck för $\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} B dz$ och $B_1, B_2 \ldots B_n$ i (1) erhålles

$$\begin{aligned} a_0 h + \frac{a_2}{3} \cdot \frac{h^3}{2^2} + \frac{a_4}{5} \cdot \frac{h^5}{2^4} + \ldots &= a_0 h (l_1 + l_2 + \ldots + l_n) + \\ + a_1 h (l_1 z_1 + l_2 z_2 + \ldots + l_n z_n) + a_2 h (l_1 z_1^2 &+ \\ + l_2 z_2^2 + \ldots + l_n z_n^2) + \ldots . \end{aligned}$$

Om denna likhet skall gälla för alla värden på $a_0, a_1, \ldots a_n$, måste

$$\left.\begin{aligned} l_1 + l_2 + \ldots + l_n &= 1 \\ l_1 z_1 + l_2 z_2 + \ldots + l_n z_n &= 0 \\ l_1 z_1^2 + l_2 z_2^2 + \ldots + l_n z_n^2 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2}{2^2} \\ - - - - - - - - - - & \end{aligned}\right\} . \qquad (2)$$

På grund av att ekv. i detta system äro homogena i avseende på $z_1, z_2 \ldots z_n$ och h, bli $l_1, l_2 \ldots l_n$ oberoende av h.

Om vi anta avstånden mellan snittytorna vara lika, blir $z_1 = -z_n$; $z_2 = -z_{n-1}$ o. s. v.

Vidare bli i detta fall ekvationerna i (2) oförändrade, om l_1 byter plats med l_n, l_2 med l_{n-1} o. s. v., på grund varav koefficienterna l bli lika för i avseende på mittsnittet symmetriskt belägna snittytor. Härav följer, att ekvationer med jämnt ordningsnummer i systemet (2) äro identiskt satisfierade, varav slutligen följer:

Om n är ett udda tal satisfiera n storheter l ett ekvationssystem med (n + 1) ekvationer; volymen kan sålunda framställas genom n stycken snittytor.

Om däremot n är ett jämnt tal, kan det bevisas, att om — som det ovan antagits — snittytorna skola vara ekvidistanta, kunna n storheter l endast satisfiera lika många, alltså n ekvationer; för framställning av volymen kräves sålunda nu $(n + 1)$ stycken snittytor.

Anm. 1. Det problem, som behandlats i II, kan, om man går till grunden, sägas tillhöra interpolationsläran och i samband härmed teorierna för grafisk och numerisk integration.

Anm. 2 Liksom Simpsons regel kan prismoidformeln — med vederbörliga ändringar — även användas vid approximativ beräkning av ytor.

Historisk notis. Prismoidformeln uppställdes år 1635 av Cavalieri för ett specialfall, allmänna fallet av Gregory år 1668, Simpsons regel däremot först år 1743. Från historisk synpunkt borde man kanske därför säga, att Simpsons regel uppstått ur prismoidformeln. Givetvis kan man också lätt härleda Simpsons regel ur prismoidformeln.

Den direkta syntesen av klorväte.

Av G. STARCK.

Tre reaktioner torde för närvarande vara de enda, som ifrågakomma vid demonstration av Gay-Lussac-v.-Humboldts volymlag och därmed av grunderna för molekylarkemien, nämligen

1. Bildning och spjälkning av vatten: $2H_2 + O_2 \rightleftarrows 2H_2O$;
2. » » » » klorväte: $H_2 + Cl_2 \rightleftarrows 2HCl$;
3. Förbränning av koloxid: $2CO + O_2 \rightleftarrows 2CO_2$.

Om den första av dessa är intet annat än gott att säga; såväl analysen som syntesen av vatten är lätt att utföra, och båda ge utan komplikationer mycket goda resultat. Särskilt syntesen av vattenånga är enligt min mening ett av de vackraste kvantitativa försöken i den elementära kemien.

Detta kan däremot inte sägas om klorvätereaktionen; den elektrolytiska sönderdelningen är lätt att utföra men ger så dåligt resultat, att man om den kan säga: bättre outförd. Syntesen, som företages i avsikt att visa totalvolymens oföränderlighet, ger visserligen i allmänhet avsett resultat, men är — åtminstone, då den utföres enligt anvisningarna i Molls läroböcker — både otrevlig och farlig. Följande metod att visa proportionen mellan väte och klorväte har delgivits mig muntligt. Klorvätegas upptages över kvicksilver, och dess volym mätes. Vatten införes i röret och i den bildade saltsyran en bit magnesium. Härvid skulle utvecklas vätgas med en volym = hälften av klorvätets. I verkligheten utvecklas en vätgasvolym, som endast begränsas av den tillförda vattenmängden, eftersom magnesium löses i vatten, särskilt om detta innehåller klormagnesium, vartill kommer, att metallen är i beröring med kvicksilver.

I denna tidskrifts årg. 14: 4, dec. 1931, har B. Gustaver framhållit reaktionen n:r 3 såsom ett lämpligt exempel på gasreaktioner och angivit en apparat för kvantitativ förbränning av koloxid. Härtill kan anmärkas, att reaktionen i fråga är av samma typ som knallgasreaktionen, och att den således i en kemikurs med begränsat timtal möjligen kan och bör ersätta denna, om den är jämngod därmed eller bättre, men att den icke kan ersätta klor-vätereaktionen, som visar helt andra volymsproportioner. Utan att själv ha prövat detta uppslag, måste jag dock på grundval av Gustavers egna resultat framhålla, att försöket tydligen är mycket underlägset knallgasförsöket, särskilt genom att reaktionen är ofullständig och korrektioner för överskott av koloxid och syre måste anbringas.

En gammal, redan i Heumanns bekanta Anleitung beskriven, möjligen från A. W. Hofmann(?) härstammande metod att påvisa, att klor och väte förenas utan volymsändring, består i att fylla ett långt glasrör med torr elektrolytisk klorknallgas och att bringa denna till explosion genom belysning med magnesiumljus. Denna idé är upptagen av P. Rischbieth i Z. für den physik. und chem. Unterricht 1931, sid. 117, med den ändringen, att klorgasen och vätgasen förvaras i skilda kärl och långsamt blandas genom diffusion och konvektion under belysning med solljus. Rischbieths apparat består av två lika stora kärl, det ena över det andra, förenade genom en kran med vid (8 mm) borrning. Det övre kärlet fylles med torr klorgas, det nedre med vätgas, båda av atmosfärstryck. Apparaten placeras i kraftigt solsken, varpå kranen öppnas. Efter någon halvtimmes bestrålning påvisas lätt, att det bildade klorvätet har samma tryck som den ursprungliga gasblandningen. Reaktionen är visserligen ofullständig, men det ändamål man åsyftar uppnås.

Nu är solljus som hjälpmedel vid kemisk undervisning tämligen opålitligt, ej minst i Sverige, av skäl, som ej behöva utläggas. Bågljus eller kvartslampa äro i motsats till

solen alltid tillgängliga, men till sin verkan ovissa, om apparaten göres av vanligt glas. Kvartsapparat kommer ej i fråga, och beträffande möjligheten att göra apparaten av uviolglas kan sägas, att det ur säkerhetssynpunkt är önskvärt, att reaktionen äger rum i själva kranen eller senast i dess ansatsrör, men kranar av uviolglas lära icke finnas, och vidare är glaset i kranen mycket tjockt och kräver intensiv bestrålning. Ehuru Rischbieth anser försöket nästan ofarligt, omnämner han en visserligen oskadlig explosion.

Då således den fotokemiska syntesen i vårt fall alltid måste vara rätt vansklig, har jag sökt ersätta bestrålning med en elektrisk gnisturladdning. Efter några förändringar har den använda apparaten erhållit följande utseende (fig. 1).[1]

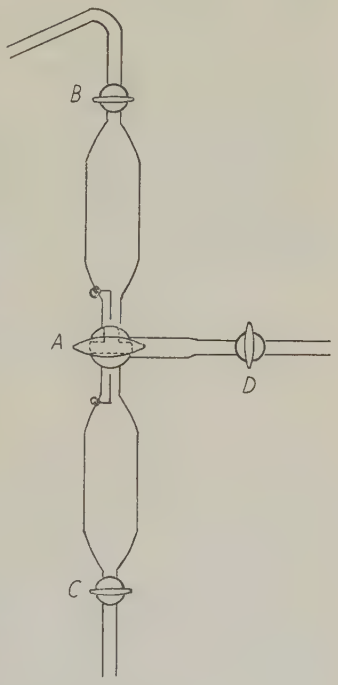


Fig. 1.

Den består av två 100 cc pipetter, förenade med en stor trevägskran *A* och tillslutna med de enkla kranarna *B* och *C*. Trevägskranens borrning, ursprungligen 6 mm, har med hjälp av en rundfil, karborundumpulver och en lösning av kamfer i terpentin ökats till 8 mm. På ömse sidor om kranen äro insatta platinatrådar, omböjda så att deras spetsar befinna sig nära krankiken på ett avstånd från varandra av c:a 35 mm. Centreringen av elektroderna åstadkommes lätt genom kranhuset, sedan kiken uttagits. Möjligen kan det vara lämpligt, att elektroderna hava ett spiralvarv i och för eventuell förlängning.

[1] Apparaten tillverkas av firman R. Grave i Stockholm.

Genom kranarna *D* och *A* fylles den övre kulan med torr klorgas, den undre med torr vätgas, båda av atmosfärstryck. Härpå stänges *D*, kärlen förenas genom *A*, och det induktorium, varmed elektroderna förbundits, sättes i gång. Efter 5 min. har klorgasens färg tydligt försvagats, efter 10 min. är den knappast synlig. Efter 30 min. avbrytes försöket, avloppsröret under *C* neddoppas i vatten, och *C* öppnas. I allmänhet stiger vattnet upp någon cm, sannolikt beroende på att gaserna ej varit fullt torra eller fullt syrefria, vidare möjligen på absorption i kranfettet. I betraktande av den stora gasvolymen (200 cc) torde man ha rätt att bortse från denna volymsminskning.

För att få en uppfattning av den erforderliga tiden har jag efter försöket lett gasen genom jodkaliumlösning och titrerat med tiosulfat (0,097 *n*) med följande resultat:

Försökstid min.	tiosulfat cc	klorgasrest cc
13	22.6	$\sim$ 25
20	7.8	$\sim$ 8.5
30	4.1	$\sim$ 4.5

På 30 min. erhölls således en omsättning av 95,5 %. Bestämmande för hastigheten torde vara krankikens borrning.

Vid försök i klassen är det lämpligare att som avslutning låta vatten stiga upp i apparaten såsom vid den bekanta springbrunnen. Här går dock vattnets insugning ganska långsamt, varför det är skäl att sedan något vatten inkommit stänga *C*, lösgöra apparaten och skaka om vattnet. Om man nu öppnar *C* under vatten rusar detta in. I vattnet kan sur reaktion och saltsyra påvisas, i restgasen klor.

Med avseende på apparatens konstruktion iakttages:

1. Krankikens *A* borrning bör vara minst 8 mm;
2. Avståndet från *A* till pipetterna bör vara litet;
3. Kranarna *B* och *C* böra sitta nära pipetterna.

Försöket torde kunna betecknas som ofarligt, men en glasskiva bör ställas mellan apparaten och auditoriet — den

ökar i varje fall intresset för experimentet. Skulle induktoriet strejka, stänges trevägskranen, tills felet avhjälpts.

Vid genomgången av volymsförhållandena vid klorvätebildningen finnes sålunda nu följande illustrationsmaterial:

För proportionen klor:väte

1. Elektrolys av klorväte;
2. Räknemässig kombination av klorvätets viktsammansättning och beståndsdelarnas litervikter;

För klorvätevolymen

3. Explosion av klorknallgas enligt anvisning i Heumann;
4. » » » » » » Moll;
5. Långsam bildning av klorväte enligt Rischbieth eller ovanstående beskrivning;
6. Beräkning av volymen av 36,5 *g* klorväte med kännedom om gasens litervikt.

Förf. begagnar för närvarande kombination 2 + 5, men en rent experimentell väg är alltjämt eftersträvansvärd.

Efterrinning vid tömning av byretter och pipetter.[1]

Av **H. SEBELIUS.**

När man låter en vätska, som fuktar glas, utströmma från en byrett, stannar ju en del av vätskan kvar på byrettens vägg som ett tunt skikt, vilket endast helt långsamt rinner efter.[2] Före den huvudsakliga efterrinningens upphörande stiger därför vätskeytan i den avstängda byretten mer eller mindre märkbart. Ju längre utloppstid man väljer för byretten, desto mindre blir efterrinningen.

[1] Efter ett meddelande i Kemiska Föreningen i Lund den 29 nov. 1924.

[2] Man har för vattenlösningar föreslagit »fullkomligt feta» byretter för att därigenom helt slippa ifrån efterrinningen.

Ofta torde det vara brukligt välja så långa utloppstider, att efterrinningen praktiskt taget kan försummas och avläsning göras omedelbart efter det att byretten avstängts. Vanligen väntar man dock en viss bestämd tid med avläsningen t. ex. $^1/_2$, 1 eller kanske 2 minuter och bör ju då hava byretten korrigerad för samma efterrinningstid. Det må här anmärkas, att efterrinningens belopp naturligtvis även är beroende av den använda vätskans viskositet. Förutsatt att man håller en bestämd efterrinningstid, bör man ju kunna vänta, att de avlästa vätskevolymerna med anbragta korrektioner skola vara praktiskt taget riktiga, såvida de betingelser, under vilka man tömmer byretten ej äro så olikartade gång efter annan, att felkällor kunna tänkas tillkomma. Min avsikt med detta meddelande har endast varit att rikta uppmärksamheten på en dylik felkälla, påträffad tack vare några vid korrigering av byretter gjorda iakttagelser, att efterrinningens storlek ej obetydligt påverkas av de rörelser, en byrett kan tänkas utsatt för under tömningen. Jag märkte nämligen, att efterrinningen blev större, om den byrett, som tömdes, därvid råkade skaka något. Vid tömning av en byrett, som befinner sig i skakning, utbildas ett betydligt tjockare vätskeskikt på byrettväggen än vid tömning av en stillasittande byrett.

Tab. 1.

Min.	I	II	III	IV
0	24,70	24,52	24,66	24,80
1	,70	,49	,57	,79
2	,69	,48	,54	,77
3	,68	,46	,51	,75
4	,68	,44	,50	,74

Tab. 2.

Min.	I	II	III	IV
0	49,88	49,91	49,87	49,88
1	,87	,83	,75	,87
2	,87	,80	,70	,83
3	,87	,78	,67	,80
4	,86	,76	,65	,79

I tabellerna 1 och 2 anföras som exempel några byrettavläsningar, ur vilka efterrinningens storlek (efter utsläppning av c:a 25 resp. 50 ccm vatten) under var och en av

de fyra första minuterna lätt erhålles. Utloppstiden för 25 ccm var 23 sek., för 50 ccm 60 sek. Första avläsningen i varje kolumn är gjord omedelbart efter byrettens avstängning. Kolumnerna I representera tömningar utan skakning, II med skakning och III med kraftig skakning. IV i tab. 1 (resp. IV i tab. 2) hänför sig till en tömning, under vilken byretten endast under utsläppandet av de 5 första (resp. 10 första) ccm befann sig i skakning.

Av tabellerna finner man, att efterrinningen med den här valda utloppstiden är ganska ringa ($0{,}_{01}$ ccm på 2 min.), om byretten under tömningen hålles fullkomligt stilla, då däremot en skakning av byretten kan framkalla en betydande och med skakningens styrka och längd varierande efterrinning. Även om man håller en bestämd efterrinningstid, riskerar man således i senare fallet få oriktiga värden på den nedsläppta volymen. Denna risk blir emellertid mindre ju längre efterrinningstid man väljer. Enklast undgår man naturligtvis den här påpekade felkällan, om man sörjer för, att byretten blir i möjligaste mån stabilt upphängd.

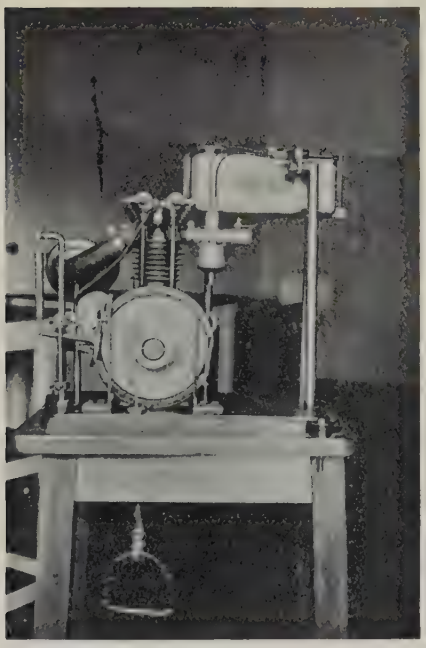
Även vid tömning av en pipett kan naturligtvis skakning märkbart påverka storleken av under för övrigt lika betingelser utsläppta vätskevolymer. Exempelvis kunde en pipett på 20 ccm, med en utrinningstid för vatten på 17 sek., och som därpå utblåstes efter 5 sek., giva upp till $0{,}_{05}$ ccm mindre volym, om den skakades, än om den hölls stilla under tömningen. För mera viskösa vätskor konstaterades ännu högre differenser.

Oaktat den här anförda felkällan ej allt för ofta torde få tillfälle spela någon roll, kan den dock understundom förtjäna att bli uppmärksammad. Den noggrannhet, man vid arbete med byretter och pipetter anser sig kunna uppnå genom att iakttaga vissa andra föreskrivna, mer eller mindre subtila försiktighetsmått, torde annars lätt kunna bliva illusorisk.

Huru jag undersökte skolans bensinmotor.[1]

Uppgiften för mitt enskilda arbete i fysik var att lära mig sköta skolans encylindriga fyrtaktsmotor, studera de olika motordelarnas konstruktion och verkningssätt samt att experimentellt bestämma motorns effekt genom ett bromsprov.

Motorn,[2] vars utseende framgår av bifogade figur, är fastsatt på en bottenplatta av gjutjärn, som i sin tur är fastskruvad vid ett litet bord. Bensin- och oljebehållaren, som är tillverkad av förtent plåt, rymmer två liter bensin och en halv liter olja. Den står i förbindelse med förgasaren resp. oljepumpen genom två kopparrör, försedda med kranar. Hävarmarna för reglering av bensin och luft äro monterade på en vinkelböjd stång på sidan om bensinbehållaren. Hävarmarnas rörelser överföras till ventilerna i förgasaren genom bajonettkablar. Magnetapparaten, som synes längst till vänster å figuren är helkapslad och försedd med en liten hävarm för inställning på låg- och högtändning. Avgasningsröret utmynnar strax ovanför magneten och är utbyggt till en effektiv ljuddämpare.



Först lärde jag mig starta motorn. Detta tillgick på följande sätt. Kranarna för olja och bensin öppnades, tändningen inställdes på »låg» och en stållina, som i ena ändan är försedd med en stig-

[1] Anteckningar från ett enskilt arbete i fysik vid Östermalms läroverk utfört hösten 1931 av lärj. i ring III a, Allan Bergfelt.

[2] Den här beskrivna motorn saluföres av firman Rudolph Grave, Stockholm.

bygel och i den andra med en stoppmutter, virades tre varv kring en liten skiva fastsatt på balanshjulet (se fig.) Trampar man ned stigbygeln hastigt, startar motorn, och stållinan lossar automatiskt. Någon fara för backslag fanns ej.

När motorn börjat arbeta, studerade jag hur ändringar i luft- och besintillförseln samt hur låg- och högtändning inverkade på motorns gång. Låter man motorn gå med lägsta hastigheten, kan man direkt iakttaga, hur insugnings- och utblåsningsventilerna röra sig och hur de lyftas av spindlarna, som vila mot kamaxeln.

Sedan jag studerat motorns arbetssätt, övergick jag till en detaljundersökning av motorns olika delar. Tändstiftet borttogs och avritades. Avståndet mellan spetsarna justerades medelst en mall till exakt $^1/_2$ mm. För att undersöka att inga tändningsfel förekommo, lades tändstiftet med fastsatt kabel mot bottenplattan, och motorn vreds runt. Härvid hoppade gnistor över mellan spetsarna.

Skruvarna på cylinderns topp lossades och cylinderns övre del togs bort. Cylinderns diameter var 60 mm och slaglängden 61 mm. Jag vred nu på balanshjulet och såg då, hur kannan rörde sig i cylindern och hur ventilerna öppnade sig på bestämda tider. Denna tid uttryckes enklast i den vinkel, som balanshjulet vrider sig under det vardera ventilen är öppen. På detta sätt erhålles ett »ventildiagram». Ur detta diagram kan man sedan sluta sig till hur kammarna äro placerade på kamaxeln.

Den elektriska gnistan, som hoppar över mellan spetsarna i tändstiftet vid övergången från andra till tredje takten, alstras av en magnetapparat. Denna består av en växelströmsgenerator, en avbrytare och en transformator. Generatorns magnetiska fält erhålles från en permanent magnet. Ankaret drives genom en kedja från kamaxeln. Den från ankarlindningen kommande lågspända strömmen ledes till en vid ankaraxeln fäst metallarm, vars yttre ända glider mot en stillastående ring av stål. Denna ring, som står i förbindelse med godset, är på ett ställe försedd med en fördjupning. Då metallarmen under sin rotation passerar denna fördjupning, avbrytes strömmen genom ankaret (primärströmmen). I transformatorns sekundära lindning, som består av många varv fin tråd lindad utanpå ankarlindningen, alstras vid strömavbrottet en högspänd ström, som genom en kabel ledes till tändstiftet. Vrider man stålringen kring sin axel, ändras naturligtvis tidpunkten för strömavbrottet. På detta sätt ställer man in på låg- och högtändning.

Oljepumpen är helautomatisk och utvändigt försedd med en

kontrollkolv. Genom att tid efter annan observera kontrollkolven kan man alltså övertyga sig om att smörjningsanordningen fungerar tillfredställande. Oljepumpen är direkt kopplad till kamaxeln och mängden olja, som släppes fram, kan justeras genom att man lossar skruvarna på oljepumpens lock och vrider detta medsols, då oljetillförseln ökas. Jag skruvade sönder pumpen och såg då, att kamaxelns förlängning var försedd med en evighetsskruv, som drev ett snäckhjul inuti oljepumpen. Detta snäckhjul i sin tur bringar en stålstång — gående rakt genom snäckhjulet — att rotera och ger den samtidigt en upp- och nedgående rörelse som en pumpkolv. Denna kolv pressar in oljan i ledningen till motorn.

Förgasaren, som lätt kan tagas i sär, studerades i detalj.

Motorns effekt bestämdes genom en bromsanordning, som synes å fig. Mot balanshjulet pressas medelst skruvar två halvcirkelformiga bromsklossar, som på insidan äro beklädda med bromsband. Vid den ena bromsklossen är fastsatt en arm, som är fäst vid en fjädervåg. Då bromsen pressas mot den roterande skivan, sträckes fjädern, tills jämvikt råder mellan fjäderns spänning och friktionen vid bromsskivans omkrets.

Kallas den på fjädervågen avlästa kraften för p kgf, vinkelräta avståndet från vevaxeln till kraftens riktningslinje L meter, blir det under ett varv uträttade arbetet $2\pi pL$ kgm. Gör motorn n varv per minut (bestämmes med varvräknare), blir motorns effekt

$$H = \frac{2\pi pLn}{60 \,.\, 75} \text{ hästkrafter.}$$

Vid ett försök erhölls $L = 0{,}2105\ m$, $n = 1\,410$ och $p = 2{,}25$ kgf. Motorns effekt blir alltså 0,93 hästkrafter. Orsaken till att värdet på effekten är så lågt, är att motorn vid detta försök arbetade med lågtändning.

För kylning av motorn användes under bromsförsöket en liten elektrisk fläkt.

Från början var det även meningen att bestämma den effektiva termiska verkningsgraden. Denna beräknas på följande sätt. En hästkrafttimme är $75 \,.\, 60 \,.\, 60$ kgm $= 632{,}3$ kg-kal. Betecknas bensinåtgången per timme med G kg och bensinens förbränningsvärme med F kg-kal/kg, blir verkningsgraden

$$\frac{H \,.\, 632{,}3}{F \,.\, G}$$

Tiden tillät dock icke en noggrann bestämning av bensinåtgången, varför detta försök ej utfördes.

Allan Bergfelt.

Kopplingstavla för växelström.

Marmortavlan, på vilken instrumenten och manöverrattarna äro monterade, är 125 cm bred och 85 cm hög (fig. 1). Den är genom en järnställning fastsatt vid väggen. Från tavlan utgå ledningar till en motor-generator, som är placerad i ett annat rum (fig. 2). Motor-generatorn består av en likströmsmotor och en

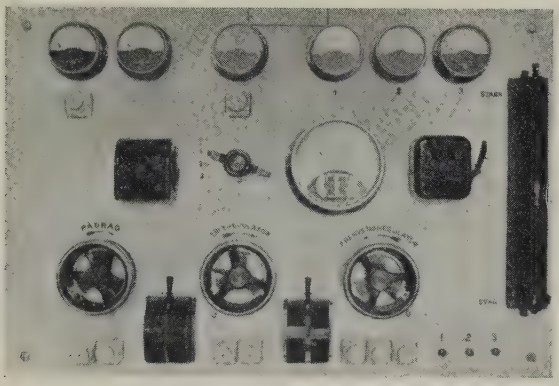


Fig. 1. Kopplingstavla för växelström.

med denna direkt kopplad trefasgenerator, som lämnar 1 kW vid 200 volts spänning och 50 perioder. Från generatorn utgå tre ledningar till tavlan, där de genom en trepolig knivströmbrytare kunna sättas i förbindelse med ledningar, som äro framdragna till det i samma rum som tavlan befintliga föreläsningsbordet.

För manövrering av motorn finns på tavlan en tvåpolig knivströmbrytare, en ampèremeter, en voltmeter, ett pådrag och en frekvensregulator, vilken utgöres av ett i serie med motorns magnetlindning inkopplat variabelt motstånd. Genom att ändra motståndet i frekvensregulatorn, ändras motorns varvtal och därmed den alstrade växelströmmens frekvens, som kontinuerligt kan ökas från 20 till 56 och avläsas på den mellan två faser inkopplade visarfrekvensmätaren.

Växelströmmens spänning kan kontinuerligt ökas från 40 till 220 volt med tillhjälp av två i serie med generatorns magnetlindning inkopplade motstånd, av vilka det ena — ett rattmotstånd — användes för finreglering och det andra — ett skjutmotstånd — för grovinställning. Spänningen avläses på en voltmeter, som

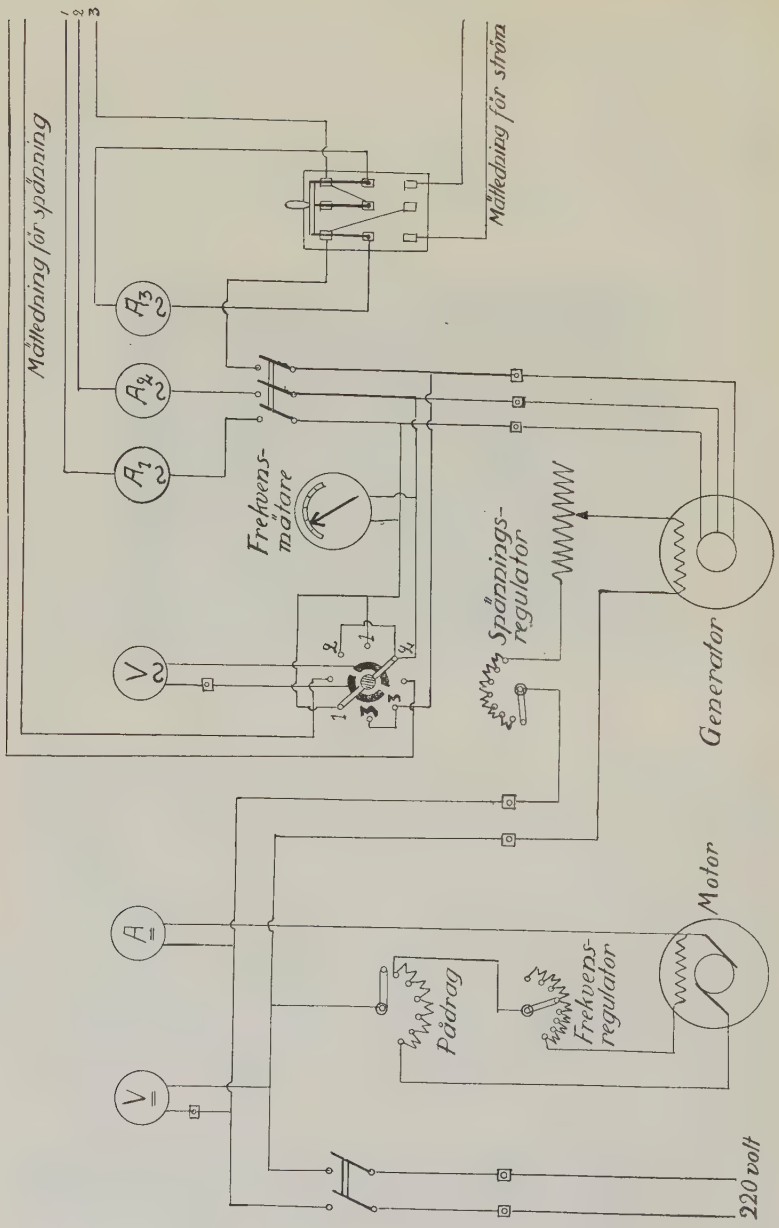


Fig. 2. Schema över kopplingstavla för växelström.

genom en omkastare kan inkopplas mellan de olika faserna. I var och en av de till bordet utgående ledningarna finns en ampèremeter, graderad till 5 ampère.

Utom nu nämnda ledningar utgå från tavlan till bordet tre dubbelledningar. Den ena av dessa, som på ritningen kallas »mätledning för spänning», går till två kontakter på voltmeteromkastaren. Ställes omkastarens arm i förbindelse med dessa kontakter, blir voltmetern bortkopplad från tavlan och kan då användas för mätningar på bordet. För att även ampèremetrarna skola kunna användas för mätningar på bordet, äro två av dem kopplade till var sin trepoliga knivomkastare. Av utrymmesskäl är på kopplingsschemat endast en omkastare utritad. Då knivarna äro ställda uppåt, äro ampèremetrarna inkopplade i de strömförande ledningarna; ställas de nedåt, bli ampèremetrarna inkopplade i mätledningarna utan att de strömförande ledningarna därför brytas.

Ifrågavarande kopplingstavla, som är inköpt för Östermalms läroverks räkning genom firman Rudolf Grave, är utförd av Graham Brothers Aktiebolag i Stockholm. Vid en i dagarna gjord förfrågan har uppgivits, att priset för tavlan inklusive instrument, rattar och järnställning för närvarande är 635 kronor.

C. Bergholm.

Newtons ringar som elevlaboration.

Det är önskvärt, att eleverna i realgymnasiets högsta ring få utföra en bestämning av ljusets våglängd. Enkla och prisbilliga apparater för detta ändamål finnas emellertid ej i handeln. För att avhjälpa denna brist har jag enligt Grimsehls Lehrbuch der Physik sammanställt en enkel apparat för bestämning av ljusets våglängd med tillhjälp av de Newtonska ringarna.

Det horisontellt infallande ljuset från en natriumlåga reflekteras mot en planspegel lodrätt nedåt mot en plankonvex lins, som med den konvexa ytan vilar mot en plan glasskiva. Det reflekterade ljuset passerar ett hål i spegelns beläggning och iakttages genom en lupp. Vid tillräckligt stor krökningsradie å linsen kunna ett stort antal ringar iakttagas och deras radier avläsas medelst en å linsen placerad okularmikrometer, graderad i $^1/_{10}$ mm.

I firma Roses optik, Norrlandsgatan 5, Stockholm, inköptes runda glasögonlinser å 0,25 D. Av fabrikanten betecknade som bi-

konvexa visade de sig i verkligheten vara plankonvexa. Att använda vanligt spegelglas till den plana glasskivan visade sig vara omöjligt, varför i samma firma inköptes runda planslipade glas. Till lupper användes linser å c:a 7 D, som erhöllos från Norstedt & Söner, Stockholm. Samtliga dessa glas kostade i inköp 1 kr. st. Apparaterna förfärdigades sedan av maskinist H. Berggren vid Högre reallläroverket å Norrmalm i Stockholm.

För att visa apparatens användbarhet meddelas här resultaten av en mätning av natriumljusets våglängd, företagen med densamma.

Under antagande av att glasets brytningsindex $= {}^3/_2$, beräknades den konvexa ytans radie till $R = 2000$ mm. En noggrannare bestämning av radien bör leda till noggrannare värde å våglängden.

Om r_m är radien i den m:te cirkeln och r_n i den n:te, så är våglängden (se t. ex. GRIMSEHLS lärobok)

$$\lambda = \frac{(r_n + r_m)(r_n - r_m)}{R(n - m)}.$$

Våglängd och radier äro i tabellen angivna i mm. Vid beräkning av λ ha r_1 och r_{11}, r_2 och r_{12}, o. s. v. kombinerats.

n	r	n	r	$r_n + r_m$	$r_n - r_m$	$\lambda \times 10^6$
1	0,6	11	3,55	4,15	2,95	612
2	1,2	12	3,6	4,8	2,4	576
3	1,7	13	3,75	5,45	2,05	559
4	2,0	14	3,95	5,95	1,95	580
5	2,35	15	4,05	6,4	1,7	544
6	2,5	16	4,25	6,75	1,75	591
7	2,7	17	4,40	7,1	1,7	604
8	3,0	18	4,50	7,5	1,5	563
9	3,25	19	4,65	7,9	1,4	553
10	3,4	20	4,8	8,2	1,4	574

Såsom medelvärde erhålles $\lambda = 0{,}000576 \pm 0{,}000007$ mm.

Apparaterna kunna beställas hos maskinist Herman Berggren, Tulegatan 14, Stockholm, och kosta i komplett skick, dock utan okularmikrometer, 5: 50 kr. Okularmikrometern i ${}^1/_{10}$ mm erhölls hos A.-B. Axel Lundqvist, Drottninggatan 2, Stockholm, till ett pris av 8 kr. st.

Karl Gustav Karlsson.

Några nyare ljuskällor för olika ändamål.

Under senare tid har ett flertal nya eller förbättrade ljuskällor kommit i marknaden, vilka äro ägnade att underlätta arbetet vid olika slag av experiment eller demonstrationer. Några av dessa ljuskällor skola här erhålla ett kortfattat omnämnande.

I många fall har man behov av en ljuskälla med monokromatiskt ljus. Mest har väl därvid använts en bunsenbrännare, i vilken man infört natrium eller någon natriumförening, varvid ju ett relativt kraftigt gult ljus erhålles. Olägenheten med denna ljuskälla är främst dess växlande intensitet. Det betyder därför ett stort framsteg, då nu en jämnt lysande och praktiskt taget monokromatisk ljuskälla kommit i marknaden (Osrams Natrium-Klein-Lampe); 99 % av det från denna lampa emitterade ljuset motsvarar D-linjen (våglängd 589 mμ), medan resten i huvudsak utgöres av natriumlinjerna 616 mμ (röd) och 568 mμ (grön). Önskas fullständig monokromatisering, så kan man givetvis med lämpliga filtra avlägsna även denna rest. Lampan är cylinderformad (3 cm diameter, 17 cm höjd) och är försedd med fyrpolig sockel ungefär som ett radiorör. Invändigt finnas tvenne glödelektroder, varjämte röret innehåller natriummetall samt en ädelgas. Lampan kan levereras för såväl lik- som växelström. Till lampan måste ovillkorligen höra ett förkopplingsmotstånd. Först släppes strömmen fram genom de båda glödelektroderna (i serie), som bringas till rödglödning, vilket tager 20 sekunder; därefter lägges hela nätspänningen mellan dessa elektroder, varvid en urladdning uppstår. Till att börja med visar denna ädelgasens spektrum. På grund av den utvecklade värmen avdunstar emellertid natrium, och efter två minuter har ädelgasens spektrum helt försvunnit, och endast natriumljus emitteras. Utstrålningen bibehålles därefter konstant, och ingen efterreglering av något slag är nödvändig. Den lysande ytan är 1,5 cm² med en ljustäthet av 4—6 hefnerljus pr cm². Lampan föres av Norstedt och Söner, Leybolds Nachfolger (repres. A Sticher, Stockholm), etc.; pris kr. 60:—.

En värdefull ljuskälla är även en kvicksilverånglampa enl. v. Hippel (Phys. Zeitschr. 1932, Heft 2) från Schott & Gen. i Jena. Den föres likaledes i handeln här av P. A. Norstedt och Söner. Medelst denna lampa erhålles ett ljus bestående av de välkända kvicksilverlinjerna, vilka kunna isoleras var för sig genom lämpliga filter; en rad dylika saluföras särskilt. Önskar man ett mera linjerikt spektrum, så kan man erhålla lampan med en tillsats av

kadmium till kvicksilvret. Den matas med likström och är försedd med förkopplingsmotstånd. Några särskilda manipulationer för tändning behövas ej, utan denna sker automatiskt efter cirka 30 sekunder. Ljusbågen brinner synnerligen jämnt och har formen av ett rakt streck (»spaltförmig») av stor intensitet. Lampan levereras med stativ i olika utföranden. Det bör även påpekas, att lampan kan erhållas utförd av kvarts, varigenom den rikliga ultravioletta strålningen kommer till sin rätt. Genom ett speciellt filtrum kan man därvid, om så önskas, helt avstänga den synliga strålningen och endast genomsläppa den ultravioletta.

Även Leybold's Nachfolger (repres. A. Sticher, Stockholm) för en liten kvarts-kvicksilverånglampa i handeln. Till densamma hör ett litet stativ med lamphus och förkopplingsmotstånd. Även för denna lampa levereras ett filter, som avskärmar den synliga strålningen. Det ligger i sakens natur att kvicksilverlampan måste matas med likström; vid växelström fordras sålunda likriktare.

För spektroskopiska ändamål finnes ett stort antal urladdningslampor för skilda gaser från Adam Hilger i London, vilka lampor även kunna erhållas utrustade med kvartsfönster, om man önskar studera den ultravioletta delen av strålningen. Lampans konstruktion är sådan att den strålande ytan är ringa men intensiteten stor. Lampor med kvartsfönster finnas med följande gaser: kväve, koldioxid, helium, argon, neon, krypton och xenon. Lamprörens diameter är 1 tum och höjden $3^1/_2$ tum; de äro försedda med bajonettfattning men kan en »adapter» för deras bruk vid Edisonhållare erhållas för 2 shilling. Givetvis tarva några av de nämnda gaserna något mer än 220 volts spänning.

En intressant nyhet är även, att Nernststift åter föras i marknaden (Leybold's Nachfolger, September-Mitt. 1932). På grund av denna ljuskällas linjeformade karaktär kan man ju använda den utan spalt och kondensor, vilket i många fall underlättar uppställningen av försöksanordningarna vid olika optiska demonstrationsförsök. Ett antal dylika försök skildras f. ö. i nyssnämnda septemberblad från Leybold.

Helmer Bäckström.

Bokanmälningar.

C. E. Sjöstedt, *Projektiv geometri.* Bilaga till Redogörelse för högre allmänna läroverket i Östersund läsåret 1931—1932, Östersund 1932, 86 sid., kr. 2:—.

Författaren uppger i förordet, att arbetet är avsett för var och en, som har intresse för geometri utan att ha bedrivit specialstudier i ämnet, och att han tänkt sig, att det även skulle lämpa sig för enskilt arbete för lärjungar i realgymnasiets högsta ringar.

Den projektiva geometrien erbjuder ett mycket fängslande studium. Det finns väl intet område inom matematiken, inom vilket man så fort får ett levande intryck av en verkligt skön tankebyggnad, som dessutom ej heller skymmes av en svårlärd teknik. Icke desto mindre är det ej en allt för lättvindig uppgift att kasta sig på dess studium. Om man ej orkar så långt som till dess användning på de koniska sektionerna, får man föga begrepp om dess skönhet och användbarhet. Jag fruktar därför, att det skulle bli en mycket betungande uppgift som enskilt arbete, och att ytterst få gymnasister kunna avstå så mycken tid, att de kunna studera tillräckligt mycket av författarens arbete, hur önskvärt det än vore för var och en, som mera allvarligt tänker syssla med matematik, att redan på ett tidigt stadium komma i kontakt med ett så intressant område som den projektiva geometrien. För de få, som ha tid och förutsättningar i övrigt för saken, synes mig arbetet vara lämpligt, liksom för de matematiklärare, som ej förut stiftat bekantskap med den. Bevisföringen är på sina ställen verkligt elegant. Då jag ej haft tid att nu studera de av författaren citerade arbetena, är det mig omöjligt att avgöra i vad mån framställningen är originell. Lättläst är den ingalunda alltid, vartill bland annat bidrager, att läsaren allt som oftast vid bevisföringen hänvisas till i texten insprängda problem, vilkas lösning överlåtes åt läsaren. Naturligtvis är det riktigt, att problemlösning är den enda möjligheten att tränga in i ämnet någorlunda tillfredsställande, och problem förekomma också talrikt (inemot 200 stycken). För den, som fort vill studera boken, är författarens metod i varje fall en smula obekväm.

Jag kan ej garantera, att felaktigheter ej förekomma i boken, då jag ej haft tid till ett tillräckligt noggrant studium av den. Jag har blott funnit ett fel. På sidan 27 vill författaren bevisa, att om två punktrader äro projektiva, och punkten P motsvaras av punkten P', så måste mellan deras koordinater bestå relationen $: axx' + bx + cx' + d = 0$. Författaren avfärdar frågan med att påstå, att om mot varje x-värde svarar ett och endast ett x'-värde och omvänt, måste sambandet mellan x och x' vara av första graden såväl i avseende på x som x'. Såvida ej x' är en överallt kontinuerlig funktion av x, är påståendet i varje fall ej riktigt, och något försök att uppvisa funktionens kontinuitet göres ej. Även om beviset vore riktigt, skulle åtminstone en gymnasist ha svårt att sentera det. Påståendet är ju lätt bevisat genom att hänvisa till den förut bevisade satsen, att fyra punkters dubbelförhållande ej förändras vid en projektiv avbildning.

Den som blott vill taga reda på vad projektiv geometri är och vad den duger till, kan gott nöja sig med att studera föreliggande arbete och kan dessutom utan skada bortse från författarens behandling av de plana tredjegradskurvorna. Det bör vidare vara en lämplig inledning till ett grundligare studium av den projektiva geometrien. Dess utgivande synes mig vara väl motiverat.

P. G. Persson.

C. E. Sjöstedt, *Geometriska uppgifter och lösningsmetoder.* A. B. Wisénska bokhandeln (i distribution), Östersund 1932, 38 sid., 90 öre.

Författaren uppger i förordet, att arbetets första del, som upptager ungefär hälften av utrymmet, är avsedd att användas vid repetitionen av geometrien å realgymnasiet. Den innehåller de viktigaste satserna i Euklides' fyra första böcker (utan bevis) jämte ett antal övningsuppgifter (150 stycken). Säkerligen är boken mycket användbar i R I[a], där en dylik repetitionskurs bör medhinnas. I det treåriga realgymnasiet är ju däremot tiden så knappt tillmätt, att en repetition av realskolans geometrikurs, hur nyttig, för att ej säga nödvändig, den än må vara, ej kan medhinnas. För de få lärjungar, som ha tid att på egen hand ägna sig åt en sådan, bör den kunna utgöra en god handledning.

Den andra delen av arbetet är i främsta rummet avsedd för intresserade elevers självstudier och för enskilt arbete i det differentierade gymnasiet. Den innehåller utom 100 övningsuppgifter en kort översikt av elementära metoder för lösning av konstruktionsuppgifter, benämnda »reduktion», »spegling», »vrid-

ning», »hjälpcirkel», »ortmetoden», »likställighetsmetoden». Den så kallade algebraiska analysen behandlas ej alls, vilket ju givetvis är onödigt, då den utförligt genomgås i gängse läroböcker. Att den här utelämnats, kan möjligen ingiva läsaren den föreställningen, att författaren ej anser den vara nog »fin». Då så säkerligen ej är förhållandet, borde den måhända ha omnämnts. Önskvärt hade också varit, att författaren döpt om den så kallade vridningsmetoden. Vridning borde ju vara en kongruent avbildning. Måhända hade på sina ställen större utförlighet varit av nöden. Det kapitel, som försetts med rubriken »hjälpcirkel», och som särskilt får användning vid författarens behandling av Apollonius' tangeringsproblem, hade blivit vida klarare, om han infört begreppet »en cirkels potens i en punkt» och någorlunda utförligt behandlat det. Slutligen hade det varit önskvärt, att författaren åtminstone vidrört frågan om villkoren för att ett problem skall kunna lösas med passare och linjal, och vad det egentligen innebär, att man vid ett problems lösning pålägger sig en sådan begränsning.

Matematiklärarna ha skäl att vara författaren tacksam för den lilla boken. Givetvis kan man önska, att den varit utförligare i åtskilliga punkter, men om alla önskningar, som här framförts, verkligen genomförts, kunde lätteligen omfånget ha svällt ut så pass, att utgivandet inneburit för stora ekonomiska risker.

P. G. Persson.

Yrkespedagogiska Centralanstaltens Kompendier. Uppgifter i fysik, givna i provskrivningar vid tekniska läroverk. På uppdrag av Kungl. Skolöverstyrelsen redigerade av Olaf Eriksson, Stockholm 1931, 187 sid., kr. 2: —.

Denna samling innehåller ej mindre än 779 exempel, huvudsakligen fallande inom hydro- och aerostatik och värmelära (334 ex.) samt inom elektricitetslära (316 ex.). Övriga uppgifter äro fördelade under följande rubriker: felberäkning, specifik vikt, vågrörelselära, akustik, optik och magnetism. De flesta uppgifterna äro rena räkneuppgifter, dock förefinnas också några uppgifter av samma slag som studentskrivningarnas tidigare förekommande sista uppgift. I vissa fall kräva uppgifterna för sin lösning grafisk behandlingsmetod.

Efter varje uppgift inflyter svar samt upplysning om var och när uppgiften använts. I vissa fall angives ock uppgiftens författare eller göres hänvisning till den exempelsamling, varifrån uppgiften stammar.

Det synes i själva verket vara så, att en mycket stor del av

uppgifterna äro nya. Formuleringen utmärker sig med få undantag för klarhet och reda. Innehållet i uppgifterna är, såsom ju kan vara att vänta i detta fall, ofta hämtat från det praktiska livet. Nya och intressanta uppslag och kombinationer påträffas mycket ofta. Svårighetsgraden svarar ungefär mot uppgifternas i studentexamen. En hel del uppgifter falla emellertid på områden utanför realgymnasiets kurs. Detta gäller om alla eller åtminstone större delen av uppgifterna under rubriken felberäkning, värmets fortplantning, förbränning, termodynamik, vågrörelselära, induktion, enfas och trefas växelström samt transformatorer. Även i fråga om åtskilliga exempel på likströmsgeneratorer och motorer gäller detsamma.

Den minst värdefulla delen av samlingen är avgjort akustik och optik. Visserligen saknas ej heller här originella uppgifter, men de äro tunnsådda och i det hela äro dessa uppgifter av ringa intresse. Detta beror givetvis på att de tekniska läroverken ej ha mycken tid att ägna åt dessa områden. Däremot äro uppgifterna på statik, värmelära och elektricitetslära synnerligen värdefulla. Undertecknad känner knappast mer än en exempelsamling, som på dessa områden kan med framgång taga upp tävlan med föreliggande samling, och det är samlingen av uppgifter i studentexamen.

Den största betydelsen får naturligtvis denna samling för de tekniska skolorna, vilka kunna utnyttja hela det förefintliga och för dem särskilt tillrättalagda materialet. Men även för de allmänna läroverkens lärare och elever innebär den en mycket värdefull tillgång.

När nu de relativt fåtaliga fysiklärarna vid de tekniska skolorna kunnat åstadkomma en så värdefull samling, vad skulle ej då kunna åstadkommas, om läroverkens många lärare kunde förmås att avstå något av det bästa av sina egenhändigt utarbetade uppgifter för en motsvarande samling?

C. S. Werner.

Fysikk-opgaver for gymnasiet av Gunnar Juel og Emil Vollset. F. Bruns Bokhandel. Trondheim 1931, 156 sid., kr. 3:10. *Facitbok* til Fysikk-opgaver for gymnasiet av samma författare, kr. 1:50. *Veileder i løsning av Fysikk-opgaver* av samma författare, 65 sid., kr. 2:50.

Själva exempelsamlingen, som i sin helhet innehåller något mer än 800 uppgifter, består av två olika avdelningar. Den första upptager 600 exempel, vilka enligt förordet till största delen utarbetats av de båda utgivarna men också till en del stamma från

utländska samlingar. Den andra avdelningen består av exempel, som givits i norsk artium. Samlingen omfattar nästan uteslutande exempel på mekanik, värmelära och elektricitetslära. Endast dessa områden behandlas nämligen i norska skolor med exempelräkning.

Uppgifterna i den första avdelningen erinra i fråga om svårighetsgrad närmast om dem, som förekomma i våra vanliga läroböcker. De svåraste uppgifterna i varje grupp ställa dock något högre krav. Stoffet till uppgifterna är ofta hämtat från praktiska livet eller från lektionsexperiment. Originella uppslag påträffar man relativt sällan i dessa exempel, men samlingen gör icke desto mindre ett gott intryck. Något större intresse kan den emellertid knappast påräkna inom våra läroverk, så länge de använda läroböckerna innehålla så talrika exempel som nu.

Examensuppgifterna i den andra avdelningen av samlingen äro både beträffande innehåll och svårighetsgrad rätt lika våra studentuppgifter. De äro emellertid ej fullt så mångsidiga som dessa. De erbjuda under alla förhållanden mycket av värde för de svenska skolorna. Den, som ej tidigare gjort deras bekantskap, tillrådes att göra det.

Inom varje grupp eller slag av exempel ha ett eller flera blivit av författarna fullständigt lösta och dessa lösningar ha sammanställts till ovannämnda »Veileder». Lösningarna äro klara och rediga, men detta häfte torde knappast finna någon användning hos oss.

C. S. Werner.

Helge Bohlin, *Elektrotekniska grundbegrepp och tillämpningsövningar*. Sv. Bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1932, 2:dra uppl., 170 sid., kr. 3: 50.

Föreliggande arbete utgavs i sin 1:sta uppl. år 1929 på bekostnad av Yrkespedagogiska centralanstalten. I 2:dra uppl. ha vissa ändringar och tillägg införts, vilka utan tvivel ha ökat framställningens värde.

I sin nuvarande form kan boken enligt min åsikt sägas utgöra ett mönster för liknande arbeten, dels genom sin utmärkta avvägning av de olika kapitlen och dels genom den lättförståeliga form, som förf. lyckats giva sin framställning, t. o. m. i — för den läsekrets boken närmast är avsedd för — rätt så invecklade ämnen. Som typiskt exempel härpå skulle jag vilja nämna kap. 18, där fasförskjutningen klarlägges på ett utomordentligt klart och redigt sätt.

Räkneuppgifterna (273 st.) synas mig mycket väl valda, och vid stickprov har jag ej kunnat finna några fel i facit.

Följande påpekanden anser jag böra göras.

1) Borde ej även ha redogjorts för apparater för svagström, åskledaren etc., överhuvud för vad som skulle kunna sägas ingå i elektroteknisk allmänbildning?

2) Säkringar borde måhända ha behandlats något utförligare.

3) Beskrivningar över autosynkronmotorn, motorgeneratorn och enankareomformaren saknas.

4) Det kan ifrågasättas, huruvida ej vid införandet av vektordiagram, för att underlätta förståelsen av dessa, några enkla jämförelser från mekaniken eller något annat område av fysiken bort medtagas.

5. Stavningen av ampère ej konsekvent.

Det är mig ett nöje att rekommendera arbetet, icke endast till dem som förf. närmast vänder sig till, alltså elektriska installatörer, utan även till alla dem som önska en klar och lättfattlig framställning av elektroteknikens grundbegrepp. Boken torde sålunda också kunna väl lämpa sig för Tekniska läroverk av olika slag, navigationsskolor m. fl. läroanstalter både i Sverige och grannländerna.

Sture Nydell.

Gerard de Geer, *Järnet i Sveriges näringsliv.* Stockholm 1932, Kooperativa Förbundets förl. 206 sid. Pris hft kr. 4: 50.

Den redan som författare av för allmänheten avsedda böcker och uppsatser i järntekniska ämnen välbekante disponenten i Lesjöfors har med detta arbete åstadkommit ett litet mästerverk, som förtjänar den vidaste spridning. Utan att ställa några fordringar på läsarens tekniska förutbildning ger förf. en saklig, inom den givna ramen ingående, formellt glänsande framställning av den svenska järnhanteringens historia, nuvarande tillstånd och framtidsutsikter. Allt i denna bok är intressant, men särskilt må framhållas den överblick man erhåller över den förskjutning inom järnhanteringen, som järncirkulationen och skrotets växande användning som råmaterial för handelsjärn medfört, och av denna faktors återverkan på svensk järnindustri. Tabeller, diagram och ett stort antal briljanta bilder illustrera framställningen. Författaren och hans läsare äro att lyckönska till detta intresse- och tankeväckande arbete, ett mönster för populär framställning.

G. S.

H. Rémy, *Lehrbuch der anorganischen Chemie.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1931. Del I XXXII + 718 sid., pris inb. RM 23:—, del II XVI + 450 sid., pris inb. RM 18:—.

Till sitt omfång intar detta arbete en ställning mellan Hoffmanns eller Hollemanns läroböcker och de stora handböckerna. Den bör därför vara välkommen för dem, som önska en fylligare framställning av den oorganiska kemien än den, som de gängse läroböckerna ge, men ej hava tillgång till de senare. Med allt sitt rika innehåll, som gör Rémys bok till en högst användbar uppslagsbok, är den dock något mer; den är en lärobok och en synnerligen förträfflig sådan. Man kommer ofrivilligt vid läsningen av detta arbete att tänka på Ostwalds läroböcker. Ostwalds stora patos som läroboksförfattare var att inarbeta den unga fysikaliska kemiens åskådningar i hela lärostoffet. I Rémys arbete får man bevittna en upprepning av denna process, men det är nu atomfysiken, som utgör den bakgrund, mot vilken den oorganiska kemien avtecknar sig. Den är kort sagt en oorganisk kemi på atomteoriens grund, den första i sitt slag. Både ur uppställningens, innehållets och formens synpunkt är nog Rémys arbete den bästa nu existerande tyska läroboken av större omfång; troligen finnes det över huvud taget ingen bättre. *G. S.*

Moll-Rudberg, *Lärobok i fysik II, Värmelära.* 10:e uppl., Svenska Bokförlaget (Norstedt), Stockholm 1932, 88 sid., kr. 2:—.

Denna del har grundligt omarbetats av docent Erik Rudberg. Dels ha förkortningar gjorts av en del inledande paragrafer under hänvisning till läroböckerna för realskolan, och besläktade saker sammanförts till ett kapitel (t. ex. utvidgningsläran), dels har innehållet reviderats med den synpunkten för ögonen att det vid fysikundervisningen viktigaste är »att söka fördjupa förståelsen av företeelserna själva och att påvisa det inre sambandet dem emellan». I enlighet härmed ha teoretiska synpunkter betonats starkare än tidigare. Man finner ett nytt, synnerligen klart och delvis originellt avfattat kapitel om den mekaniska värmeteorien och värmelärans andra huvudsats. Vidare har vid behandlingen av värmemotorerna expansion och överhettning givits en utförligare behandling, och ett nytt kapitel om låga temperaturer införts.

Vid ställningstagandet till det nya må läsaren taga ad notam, vad förff. uttryckligen betona, att det finstilta nya »icke är avsett såsom en ökning av kursfordringarna utan snarast som ett slags kursiv läsning och en anvisning om riktlinjer för ett vidare studium (enskilt arbete)».

En del nya exempel ha tillkommit. Bland dessa må påpekas ett tryckfel; i ex. 38 b, sid. 32 står 3 liter vätgas, bör vara 2 liter.

Omarbetningen är gjord med skicklig hand och har väsentligt förbättrat läroboken. *C. E. B.*

H. Falkenhagen, *Elektrolyte*, S. Hirzel, Leipzig, 1932. XVI + 316 sid., pris inb. RM 24: 80.

Arbetet är en utförlig och sakkunnig framställning av de nya lösningsteorier, som äro förknippade med namnen Milner, Lewis, Bjerrum, Debye och Hückel, och kan rekommenderas åt var och en som önskar grundligt inträngа i detta — för övrigt ganska svåra — kapitel av den moderna kemien.

Dædalus, Tekniska Museets årsbok 1932. Ingenjörsvetenskapsakademien, Stockholm, 125 sid., kr. 10: —. Medlem av Föreningen Tekniska Museet äger erhålla årsboken gratis och har dessutom fritt tillträde till museets samlingar, dess utställningar och föredrag och likaså till Nordiska Museet. Årsavg. kr. 10: —.

Tekniska museet har till syftemål att samla sådant, som är ägnat att skildra ingenjörskonstens och industriens historiska utveckling till våra dagar. Ett stort antal maskiner, industriprodukter, modeller belysande industriella anläggningar och arbetsmetoder m. m. har under senare år samlats och därjämte ett ansenligt arkiv upprättats innehållande uppteckningar, ritningar, bilder belysande industriens utveckling; det personhistoriska har därvid beretts ett stort utrymme. Arkivet är tillgängligt för forskare.

Museet har ännu ej fått sin lokalfråga löst. Vad som utställes i Ingenjörsakademiens fastighet, Grevtureg. 14, Stockholm, är endast exempel ur det rika förrådet. Påpekas bör, att visningar, demonstrationer och föredrag ev. med filmförevisning anordnas för skolor, föreningar och andra sammanslutningar efter vederbörlig överenskommelse.

I årsboken redogöres för nyförvärven under 1931. Bokens tyngdpunkt ligger i några intressanta och mycket förnämligt illustrerade uppsatser: Carl Sahlin, Det svenska stålets världsrykte, I. Från äldsta tid till omkring 1850. — Gust. Hessén, Äldre kopparsmältningsmetoder vid Falu gruva. — E. Hubendick, Olika tiders uppfattning om temperaturbegreppet. — L. May-Matthiesen, John Ericssons varmluftsmaskin. — Sixten Rönnow. Ett par fotografiska inkunabler från 1850-talet.

Kalendrar för 1933. Våra årligen utkommande kalendrar ha utvecklats till värdefulla uppslagsböcker med synnerligen aktuellt innehåll, som man kan ha stor nytta av, ej minst för undervisningsändamål. Här nedan följer en översikt av innehållet i några till red. insända kalendrar med hänsyn till vad som särskilt kan intressera denna tidskrifts läsare.

Almanack för alla (P. A. Nordstedt & Söner, 288 sid., kr. 2: 75). Porträtt av nobelpristagare 1931. — Statistiska upplysningar om Sveriges näringsförhållanden. — John Nerén, Om kappkörningsbilar. — Ivar Trägårdh, Ur fjärilarnas liv. — John Nerén, Vad kostar det att ha bil? — Akke Kumlien, Moderna metoder och analyser för bestämmande av en målnings ursprung.

Svenska kalendern (Almqvist & Wiksell, 290 sid. kr. 3: 75). Kalendariska uppgifter, översikt av solsystemet, upplysningar om förmörkelser under 1933, om solens upp- och nedgång i olika delar av landet, var och när midnattssolen synes, normaltider, ut- och inländska mått och vikter, kompassens missvisning under 1933—34, Beauforts vindskala. — Svenska undervisningsanstalter. — Arvid Julius, Några uppgifter om svensk rundradio.

Tidens kalender (Tidens förlag, 290 sid., kr. 2: 50). Översikt av solsystemet, förmörkelser m. m. Statistiska uppgifter om Sverige. — J. W. Sandström, Väderleken. — Gunnar Dahlberg, Sömn, sömnlöshet och överansträngning. — Torsten Quensel, Film och ljudfilm. — Hans Öhman, Yrkesfaror och yrkessjukdomar. — Gustav Lind, Beskärning och besprutning av fruktträd och bärbuskar. — Ernst Herlin, Den elektriska strömmens faror och deras avvärjande. — G. H. Christiernin, Hur ett sjökort kommer till. — Alkoholbestämning genom blodprov. — Rattutrotning i städer och på landsbygden. — Behandling vid drunkning och andra olycksfall.

Tidskrifter.

Svensk kemisk tidskrift. Utgiven av Svenska kemistsamfundet. Årligen 12 häften.

Ur innehållet i årg. XLIV, 1932. N:r 9 (sept.): E. Schjånberg, Förbränningsvärmen för klorättiksyrorna och några av dess estrar. B. Hvistendahl, Oxidativ nedbrytning av lävoglukosan. K. Billig, Ueber die Beziehungen zwischen Sidepunkt und chemischer Konstitution. — N:r 10 (okt.): L. Forsén, Om koordinationslärans tillämpning på cementets och klorkalkens kemi. — N:r 11 (nov.): L. Smith, Oxidimetrisk bestämning av små alkohol-

mängder. G. Ljunggren och G. Frang, Över mikrobestämningar av koloxid medelst jodpentoxidmetoden. P. Klason, Om barrvedslignets kemiska formel. — Referat och översikter. Meddelanden från Sveriges kemiska industrikontor.

Populär astronomisk tidskrift. Årg. XIII, 1932, dubbelh. 3—4.

Ur innehållet. Knut Lundmark, En färd genom planetsystemet. — Gunnar Tilander, Säregen framställning av vissa tecken i djurkretsen. — Jöran M. Ramberg, Om den fysikaliska jordbävningsforskningen, dess mål och medel. — Bertil Lindblad, Våra dagars astronomiska huvudproblem. — N. V. E. Nordenmark. Max Wolf †. — Notiser.

Industritidningen Norden. Årg. 1932, h. 37—51.

Ur innehållet. Tranebergsbrobygget. — Gasturbinen. — Det nya flygplanet »Södermanland». — Telegrafisk faksimileöverföring. — De första elektriska kraftöverföringarna. — De lantbrukskemiska villkoren för svenska nyodlingar. — Den nya gasklockan i Stockholm. — Ingenjörsvetenskapsakademiens och närstående organisationers verksamhet under det gångna året. — Generatorgasdrivna lastbilar. — Stereoskopisk fotografering. — Malmlastningsanordningarna i Oxelösunds hamn. — Kan man lära sig göra och exploatera uppfinningar? — Tvättad rumsluft. — Den vapentekniska utvecklingen i Sverige under Gustav II Adolfs tid. — En ny ångalstare. — Världens största fartyg. — Beskrivningar av nya uppfinningar och patent.

Era. Elektricitetens rationella användning. Årg. 1932, h. 9—12.

Ur innehållet. Skolornas elektriska belysning. — Vedlösa hus. — Elektriska motståndsmaterial. — Natriumlampan, en lågspänd luminiscensstrålare. — Återupplivning vid elektriska olycksfall. — Indalskraft till huvudstaden. — Många notiser om ny materiell.

Radioamatören. Årg. 1932, h. 10—12.

Ur innehållet. Växelströmsmottagare på likströmsnät. — Mätning av drosslars induktans. — Moderna storstationer. — Kortvågsmottagare med skärmgallerdetektor. — Televisionen i medicinens tjänst. — Nya apparattyper.

De båda tidskrifterna *Radio* och *Radioamatören* sammanslås fr. o. m. nästa år till en månadstidskrift »*Radio och Radioamatören*», utkommande den första i varje månad. Priset blir kr. 5: — per år, 50 öre per nr.

(Forts. sid. 256).

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

551) *Tre lika cirklar tangera varandra två och två samt dessutom alla en fjärde cirkel. Från en godtycklig punkt P på den sistnämnda cirkelns periferi dragas tangenterna PT_1, PT_2 och PT_3, en till var och en av de övriga cirklarna. Visa, att en av dessa tangenter (mätt från P till kontaktpunkten) alltid är lika med summan av de båda andra.* X.

552) *Till en ellips läggas två parallella tangenter och från brännpunkterna normaler mot dessa. Bestäm maximum av den så bildade rektangelns yta.*

553) *En pyramid begränsas av fyra trianglar (tetraeder). Om r betyder den inskrivna sfärens radie, r_1, r_2, r_3 och r_4 de vidskrivna sfärernas radier, så är*

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}.$$

Enklare matematiska uppgifter.[2]

554) Ekvationen $277\,x^2 - 772\,x + 277 = 0$ har rötterna x_1 och x_2. Skriv upp den ekv., som har rötterna $\frac{x_1+1}{x_1-1}$ och $\frac{x_2+1}{x_2-1}$, utan att lösa den givna ekvationen.

Svar: $109\,x^2 - 663 = 0$.

555) Förenkla uttrycket

$$\frac{(x-1)^4 + (x-1)^2 + 1}{x^2 - x + 1}.$$

Svar: $x^2 - 3\,x + 3$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 557—562 äro insända av X., 563—574 av C. E. B.

556) I $\triangle ABC$ är $\angle C = 90°$. Bissektriserna till $\angle A$ och dess sidovinkel råka BC och dess förlängning i P och Q resp. Om $PC : CQ = 1 : 4$, beräkna $AB : BC$.

Svar: 5:4.

557) Lös systemet

$$\left.\begin{aligned} x - ay + a^2z &= a^3 \\ x - by + b^2z &= b^3 \\ x - cy + c^2z &= c^3 \end{aligned}\right\}$$

Svar: $\left.\begin{aligned} x &= abc \\ y &= ab + ac + bc \\ z &= a + b + c \end{aligned}\right\}$.

558) Omkretsen av en likbent triangel är 30 cm. Bissektrisen till ena basvinkeln skär motstående sida 2 cm från dess mittpunkt. Beräkna triangelns yta.

Svar: $9\sqrt{15}$ cm^2.

559) Höjden i en liksidig triangel ABC är 3 cm. Från A till punkten P på motstående sida drages en linje, som delar omkretsen av den inskrivna cirkeln i förhållandet 1:2. Beräkna AP.

Svar: $\sqrt{9{,}6}$ cm.

560) Upplös $(1 + x + x^2 \ldots + x^n)^2 - x^n$ i två faktorer, vilka båda äro polynomer; n är ett helt tal > 1.

Svar: $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1})(1 + x + x^2 \ldots + x^{n-1})$.

561) a betecknar ett helt positivt tal > 1. Man bildar summan $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots$ av sådana bråk $\frac{1}{a}$, som kunna förvandlas till avslutade decimalbråk. Bestäm summans gränsvärde.

Svar: 1,5.

562) En cirkel O och en punkt P äro givna. Att i cirkeln inskriva en likbent triangel så, att av de lika sidorna den ena går genom P och den andra är parallell med PO.

563) Lös ekv.

$$\frac{b}{bx+1} + \frac{2}{a-x} = \frac{1}{a} + 2b.$$

Svar: $x_1 = a - \frac{1}{b}$; $x_2 = -\frac{a}{2ab+1}$. Sammanför termer och upplös i faktorer.

564) I en rätvinklig triangel är den ena kateten dubbelt så stor som den inskrivna cirkelns diameter. Den andra kateten är 2 dm. Beräkna hypotenusan.

Svar: $3\frac{1}{3}$ dm.

565) Beräkna vinklarna i en likbent triangel, vars yta delas mitt itu av en med basen parallell diameter i den a) omskrivna cirkeln b) inskrivna cirkeln.

Svar: Toppvinkeln i den förra = basvinkeln i den senare = 65°,53.

566) På en av de lika sidorna i en likbent triangel ritas a) utåt b) inåt en kvadrat kring vilken en cirkel omskrives. En av triangelns övriga sidor delas mitt itu av denna. Beräkna triangelns toppvinkel.

Svar: a) 24°,30; b) 114°,30. Ersättes kvadraten av t. ex. en liksidig triangel, erhålles 34°,34 resp. 94°,34.

567) På en sida i en triangel ritas utåt en kvadrat. Den kring kvadraten omskrivna cirkeln delar triangelns båda andra sidor mitt itu. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: 32°,85; 32°,85; 114°,30.

568) En triangel delas mitt itu av mittpunktsnormalen till en av sidorna och i förhållandet 1:2 av mittpunktsnormalen till en av de andra sidorna. Beräkna vinklarna.

Svar: Triangeln är likbent; toppvinkeln är 41°,41 eller 75°,52.

569) I en likbent triangel är basen medelproportional till den omskrivna cirkelns radie och den inskrivna cirkelns diameter. Beräkna vinklarna.

Svar 23°,90; 78°,05; 78°,05.

570) I en triangel är den omskrivna cirkelns radie fjärde proportional till triangelns sidor, och den inskrivna cirkelns radie är $\frac{1}{18}$ av triangelns omkrets. Visa, att sidorna bilda aritmetisk serie och beräkna triangelns vinklar.

Svar: 20°,80; 36°,87; 122°,33.

571) I en triangel bilda sidorna a, b och c aritmetisk serie. Medianen m_b är medelproportional till a och c. Beräkna triangelns yta, då dess omkrets är 12 dm.

Svar: $2\sqrt{6} = 4{,}899$ dm².

572) I en triangel är medianen från en sidas mittpunkt medelproportional till de båda andra sidorna och dessutom vinkelrät mot en av dessa. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: 12°,26; 64°,09; 103°,65.

573) I en triangel är en vinkel 60°, och medianen till motstående sidas mittpunkt är medelproportional till de övriga sidorna. Beräkna triangelns vinklar.

Svar: 22°24; 60°; 97°,76.

574) En triangel har sådan form, att en cirkel gående genom en sidas ändpunkter delar de båda andra sidorna mitt itu och samtidigt är koncentrisk med den inskrivna cirkeln. Beräkna de

in- och omskrivna cirklarnas ytor, då den förstnämnda cirkelns yta är 24 cm².

Svar: 9 cm² och 64 cm². Den förstnämnda cirkelns radie är medelproportional till radierna i de in- och omskrivna cirklarna.

Lösningar till uppg. 513—515.

513) *Lös ekvationen*

$$4\,tg\,x + 3\cos x = 5.$$

A. H. P.

Enligt kända formler fås

$$\frac{4 \cdot 2 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} + \frac{3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = 5$$

eller, om $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$

$$\frac{8y}{1-y^2} + \frac{3(1-y^2)}{1+y^2} = 5,$$

varav $$4y^4 + 4y^3 - 3y^2 + 4y - 1 = 0$$

eller $$(2y^2 + y)^2 = (2y-1)^2 \text{ och } 2y^2 + y = \pm(2y-1),$$

$$y = \frac{\sqrt{17}-3}{4};\quad \frac{x}{2} = 15°{,}68 + n \cdot 180°.$$

Svar: $x = 31°{,}36 + n.360°$.

S. B. Även löst av *Ewe.*

514) *Halvcirkelbågen ABCD delas i tre lika delar av punkterna B och C. Att konstruera punkten P på bågen AB, Q på BC och R på CD så, att polygonen APBQCRD vid rotation omkring AD alstrar en kropp med största möjliga volym.* *X.*

Att Q bör vara belägen mitt på bågen BC samt P och R symmetriskt med avseende på radien OQ är tydligt. Beteckna vi avstånden från P och B till AD med m och n resp., blir tyngdpunktens avstånd till AD för $\triangle APB$ $(m + n)$: 3. Enligt Guldins regel skall P ligga så, att produkten av ytan APB och tyngdpunktens avstånd till AD blir max. Enär basen AB är konstant, bör även produkten av avstånden till AB och en linje $B_1C_1 // BC$ på avståndet n från AD bli max. Produkten av avstånden från en punkt på en hyperbel till asymptoterna är konst., varför P ligger på en hyperbel med centrum i skärningspunkten M mellan AB och B_1C_1

samt transversalaxeln parallell med OB. Hyperbelnormalen i P går genom O. Normalerna i punkter med samma abscissa till hyperbler med gemensamma asymptoter (således även normaler till asymptoterna själva) ha samma x-intercept. Koordinataxlarna tänkas sammanfalla med kurvaxlarna. Konstruktionen blir alltså: Fäll $OT \perp AB$. Drag från fotpunkten T linjen $TP \parallel OB$ eller enklare: drag från AO:s mittpunkt V linjen $VP \parallel OB$. *X.*

515) *Att konstruera en korda AB i en given cirkel så, att följande figur kan uppritas. Om S betecknar det större av de två segment, som AB bestämmer, skola först två sinsemellan lika, med S likformiga segment (S_1 och S_2) placeras så, att deras kordor AD och EB utgöra delar av AB och deras bågar tangera varandra. Alla tre ligga på samma sida om AB. Uppritas sedan på DE som korda ett fjärde segment, likformigt med de föregående, men beläget åt motsatt håll, kommer dess båge att tangera den givna cirkeln.* *X.*

Om höjderna äro H i S, h i S_1 och S_2 och h_1 i det fjärde segmentet, sluter man på grund av likformigheten från likheten $AB = 2\,AD + DE$ till $H = 2\,h + h_1$ (1). Skrives (1) $H + h_1 = 2\,(h + h_1)$, synes genast, att den med AB parallella diametern i den givna cirkeln tangerar bågarna till S_1 och S_2. Då S och S_1 äro likställda med avseende på A, ligga medelpunkterna i resp. cirklar i rät linje med A och $\angle ACB = 90°$. Om mittpunkten av AB är M, fås $AM = MB = MO = h$ och $h^2 = H.\,h_1$. Sättes $AB = 1$ och $AD = EB = lx$, blir $DE = lx^2$, varav $x^2 + 2\,x = 1$, som ger $x = \sqrt{2} - 1$.

X.

Fysikaliska uppgifter.[1]

122. Ett litet lysande föremål ligger på huvudaxeln till en av luft omgiven, tunn, konvexkonkav glaslins och närmast den konkava ytan. Genom spegling i denna fås en reell bild, som ligger på samma avstånd från linsen som den efter brytning i bägge ytorna uppkomna virtuella bilden av föremålet. Sök föremålets avstånd från linsen. De buktiga ytornas radier äro 8 och 4 cm. Glasets brytningsindex är 3/2.

Svar: 32/7.

123. Ett mikroskop är skarpt inställt på en på ett papper belägen liten tuschfläck. Inskjutes mellan papperet och mikro-

[1] Uppg. 122—124 äro förf. av lektor T. Wetterblad, uppg. 125—129 av lektor R. Lundblad, uppg. 130—146 av adjunkt T. Edqvist, uppg. 147 och 148 av C. E. B.

skopet och vinkelrätt mot instrumentets optiska axel en planparallell, 3 cm tjock glasplatta, befinnes, att mikroskopet måste avlägsnas 1 cm från papperet för att fläcken ånyo skall synas tydligt. Avståndet mellan objektiv och okular hålles därvid orubbat. Beräkna härav brytningsindex för den glassort, varav plattan är gjord.

Svar: 1,5.

124. En tunn bikonvex glaslins är på ena sidan omgiven av luft, på den andra av ett efter axeln räknat 5 dm tjockt lager av kolsvavla. Var skola de reella föremål ligga, som giva verkliga bilder, belägna i kolsvavlan? De buktiga ytornas radier äro bägge 5 cm. Glasets brytningsexponent är 3/2 och kolsvavlans 5/3.

Svar: $\infty > a > 3$ dm.

125. En fin, lättböjlig koppartråd är 46,9 cm lång. Dess ändpunkter äro fastgjorda vid en smal kopparstav, på ett visst avstånd från varandra. Trådens mittpunkt är belastad med en vikt, som sträcker tråden, så att tråden tillsammans med den vågrätt placerade staven bildar en likbent triangel. Staven lägges nu tvärs över mynningen av ett 27,5 cm djupt cylindriskt kärl av järn, varvid tråden och vikten nedhänga i järnkärlet och staven fortfarande intar horisontellt läge. Bestäm avståndet mellan koppartrådens fästpunkter på sådant sätt, att trådens mittpunkt kommer att ligga lika högt över järncylinderns botten, även om temperaturen varierar. Längdutvidgningskoefficienten för koppar är $16{,}5 \cdot 10^{-6}$, för järn $12 \cdot 10^{-6}$.

Svar: 24,5 cm.

126. Ett slutet kärl rymmer 2,95 liter och innehåller luft. För att mäta luftens tryck har man genom en rörledning förbundit kärlet med en öppen kvicksilvermanometer. Kärlet med luften är uppvärmt till $+127°$, men rörledningen till manometern har rumstemperaturen, $+19°$. I manometern ställer sig kvicksilvret i den fria skänkeln 65,7 cm högre än i den med kärlet förbundna skänkeln. Volymen av rörledningen är därvid 23 cm^3, räknat från kärlet till kvicksilvret. Huru stort skulle luftmassans tryck ha varit, om hela luftmassan befunnit sig i kärlet? Gasernas volymsutvidgningskoefficient är 1/273, barometerståndet 748 mm.

Svar: 1420 mm.

127. Ett i ena ändan slutet glasrör befinner sig i vertikal ställning med den slutna ändan nederst. Röret är fyllt med kvicksilver, men vid bottnen befinner sig en liten luftbubbla, 814 mm under den fria kvicksilverytan. Den öppna ändan tillslutes med fingret, och röret placeras med den tillsmälta ändan uppåt i ett kärl med kvicksilver. När fingret borttages, ställer sig den inre kvicksilver-

ytan 754 mm högre än den yttre. Luften i bubblan utvidgas därvid och fyller hela barometerkammaren. I vilket förhållande har luftens volym ökats? Försöksanordningens temperatur är + 30°, det yttre lufttrycket 754 mm (nollgradigt) kvicksilver och kvicksilvrets volymsutvidgningskoefficient $1{,}82 \cdot 10^{-4}$.

Svar: 382: 1.

128. Två kärl rymma vartdera 7 liter och äro förbundna med en rörledning, vars volym kan försummas. Båda kärlen äro från början uppvärmda till 65° och innehålla mättad vattenånga. Beräkna vikten av den vattenånga, som kondenseras, ifall det ena kärlet avkyles till 30°, medan det andra uppvärmes till 100°. Man förutsätter, att dessa temperaturer bibehållas, tills jämvikt uppnåtts. Mättningstrycket för vattenånga är 31,8 mm vid 30° och 187,5 mm vid 65°. Vattenångans täthet är 5/8 av luftens täthet vid samma tryck och temperatur. En liter luft väger vid 0° och 760 mm 1,293 g. Absoluta nollpunkten ligger vid — 273° C. Den kondenserade vattenångans volym kan försummas i jämförelse med kärlens volym.

Svar: 1,865 g.

129. Ett i båda ändarna tillsmält graderat rör av kvartsglas innehåller en kvantitet vatten. Röret, som under hela försöket står vertikalt, har från början temperaturen 50° men uppvärmes till 120°. Det visar sig då, att vattenytan efter uppvärmningen står vid samma delstreck som före uppvärmningen. Sök förhållandet mellan den del av röret, som innehåller vatten, och den som innehåller ånga. Vattnets täthet vid 50° är 0,9880 och vid 120° 0,9434 kg/liter; luftens är vid 0° och 760 mm 1,293 g/liter. Vattenångans mättningstryck vid 50° är 92,5 mm och vid 120° 1489 mm; dess täthet är 5/8 av luftens täthet vid samma tryck och temperatur. Gasernas volymsutvidgningskoefficient är 1/273, kvartsglasets kan försummas.

Svar: 0,0228 : 1.

130. Hela ångbildningsvärmet för vatten vid 100° är 539. En del härav användes för att övervinna det motstånd lufttrycket gör mot den volymökning, som blir en följd av övergången från vätske- till ångform. Beräkna det återstående, s. k. inre ångbildningsvärmet, med tillhjälp av följande uppgifter. Absoluta nollpunkten — 273° C, lufttrycket 760 mm Hg, mek. värmeekvivalenten 427, kvicksilvers spec. vikt 13,6, torr lufts spec. vikt 0,00129 vid 0° och 760 mm. Vattenångans vikt är 5/8 av vikten av en lika stor volym torr luft vid samma temp. och tryck.

Svar: Yttre ångbildningsvärmet = 41,0, inre = 498.

131. På en vågrät slätt avskjutes under 45° vinkel mot marken en raket, som synes passera tätt över en 15,4 m hög flaggstång, vilken befinner sig 35 m från raketens utgångspunkt. Vilken är raketens hastighet i det ögonblick den passerar flaggstången? Luftmotståndet försummas. Jordacc. = 9,8 m/sek².

Svar: 17,63 m/sek.

132. Från randen av en djup klyfta avskjutes vertikalt uppåt med initialhastigheten 147 m/sek en kula, som sedan faller ned i klyftan. Ljudet av nedslaget höres från kulans utgångspunkt 33 sek efter skottets avfyrande. Hur djup är klyftan? Luftmotståndet försummas. Ljudets hastighet = 343 m/sek; g = 9,8 m/sek².

Svar: 322 m.

133. En liten partikel med massan m gram utkastas i vågrät riktning med så stor hastighet, att tyngdkraftens inverkan på dess rörelse kan försummas. Om ej heller andra krafter påverka den, kommer den att i punkten A träffa ett mot dess bana vinkelrätt plan, som befinner sig på avståndet a cm från rörelsens utgångspunkt. Om åter partikeln under de första l cm av sin väg, räknat i vågrät riktning, påverkas av en konstant, uppåt riktad kraft, f dyn, träffar den nämnda plan i punkten B, belägen b cm rätt över A. Beräkna partikelns initialhastighet.

Svar: $\sqrt{\frac{fl(2a-l)}{2bm}}$ cm/sek.

134. En liten tung kula hänger i en otänjbar tråd, vars massa kan försummas. Tråden är fästad i en punkt belägen 3 m över det horisontala golvet. Sedan kulan förts så mycket åt sidan, att tråden bildar 60° vinkel med lodlinjen, släppes den, men tråden brister, när kulan passerar lägsta punkten i sin bana, varefter kulan träffar golvet 2 m från den punkt på golvet, som ligger rätt under upphängningspunkten. Beräkna trådens längd.

Svar: 1 m eller 2 m.

135. Från periferien av ett roterande, vertikalt ställt hjul med radien 1 m lösgöra sig små partiklar. Hjulet har sådan fart, att de partiklar, som stiga rätt uppåt, höja sig 4 m över horisontalplanet genom medelpunkten. Bevisa, att ingen partikel stiger högre än $4\frac{1}{16}$ m över nämnda plan.

136. En voltmeter har motståndet R ohm. Genom att förena instrumentets klämskruvar med en shunt vill man göra det användbart som ampèremeter, så att ett på skalan avläst utslag kommer att betyda — ej antalet volt mellan klämskruvarna utan — antalet ampère i huvudledningen. Beräkna shuntens motstånd.

Svar: $\frac{R}{R-1}$ ohm.

137. En ström av styrkan I framgår i en ledare, som mellan tvenne punkter uppdelar sig i två grenar med motstånden R_1 och R_2 resp. Bevisa, att strömmen fördelar sig på grenarna så, att den i öglan utvecklade effekten blir ett minimum.

138. Två galvan. element, som ha emk. E_1 och E_2 samt inre motstånden r_1 och r_2 respektive, parallellkopplas, och det sålunda bildade dubbelelementets poler förenas med en ledning av motståndet R. Hur stor bör emk. vara för ett enda element med samma inre motstånd som dubbelelementet, för att det genom R skall kunna sända en lika stark ström som dubbelelementet?

Svar: $\frac{r_2 \cdot E_1 + r_1 \cdot E_2}{r_1 + r_2}$.

139. Fem galvan. element med liknämnda poler vända åt samma håll ha vardera emk = e volt och inre motst. = r ohm samt äro fördelade på två grupper, den ena bestående av 2 seriekopplade och den andra av 3 parallellkopplade element. De båda grupperna parallellkopplas och det sålunda bildade batteriets poler förenas genom en ledningstråd av motståndet R ohm. Vad blir strömstyrkan i denna tråd?

Svar: $\frac{8e}{7R + 2r}$ amp.

140. Ett galvan. element (vars konstanta inre motstånd ej kan försummas) slutes genom en ledningstråd av sådant motstånd, att effekten i densamma blir ett maximum. Vilken är då polspänningen? Elementets elektromotor. kraft är konstant E volt.

Svar: $\frac{E}{2}$ volt.

141. Av en homogen ledningstråd har man gjort en kvadratisk figur, försedd med en diagonal av samma sorts tråd. I en av kvadratens sidor insättes en elektromotorisk kraft E (vilken antages sakna inre motstånd). Beräkna spänningsdifferensen mellan diagonalens ändpunkter.

Svar: $E\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

142. Ett elektriskt kokkärl var stämplat: 250 V, 1000 W. En person slog 650 gr vatten av 10° i kärlet och anslöt detta till en kontakt med 200 V spänning. Efter en halvtimme hade halva vattenmängden kokat bort. Beräkna kärlets verkningsgrad. Vattnets ångbildningsvärme är 539; 1 wattsek. = 0,24 grkal.

Svar: 84,5 %.

143. Motståndet i en järntråd kan approx. beräknas ur formeln $R_t = R_0\ (1 + 0{,}005\, t)$, där R_0 är motståndet vid 0° och R_t motstån-

det vid $t°$. En strömkälla med emk = 2 V och inre motst. = 0,6 Ω slutes vid 0° genom ett järnmotstånd av 0,4 Ω. Vilken bör trådens temperatur vara, om effekten i den skall bli den största möjliga? Beräkna även denna maximala effekt. Inre motst. och emk antagas konstanta.

Svar: Effekten är störst, då trådens motstånd är lika med elementets inre motstånd, vilket inträffar vid 100°; max eff. = $1\frac{2}{3}$ watt.

144. En tangentbussol, vars konstant är 0,3, har ringen vridbar kring en lodrät axel. En ström sändes genom ringen, varpå denna vrides, förföljande magnetnålen. När dennas axel bildar 20° vinkel med magnetiska meridianen, är ringens plan parallellt med nålen och jämvikt råder. Beräkna strömstyrkan.

Svar: 0,10 (26) amp.

145. Man vill på en ort, där jordmagnetiska horisontalintensiteten är 0,17 gauss och inklinationsvinkeln 70°, upphäva jordmagnetismens totala intensitet i en given punkt genom att låta punkten vara centrum i en enkel, cirkulär strömbana med 5 cm. radie. Strömbanans plan tänkes därvid ligga vinkelrätt mot jordmagnet. fältets kraftlinjeriktning. Beräkna styrkan av den ström, som för detta ändamål måste användas och angiv även strömmens riktning.

Svar: 3,95 amp.

146. En elektron med laddningen $4{,}774 \cdot 10^{-10}$ elektrostatiska enheter kretsar med hastigheten $6{,}3 \cdot 10^{7}$ cm/sek i en cirkelformig bana, vars radie är 10^{-8} cm. Denna elektronbana kan anses som elektrisk ström. Beräkna dess styrka i ampère, då man vet, att 1 Coulomb är $= 3 \cdot 10^{9}$ elektrostat. enheter. Beräkna även det magnetiska fältets intensitet i elektronbanans centrum.

Svar: 0,0016 amp.; 10 025 gauss.

147. I punkterna A och B befinna sig två lika starka, liknämnda magnetpoler. Var på AB:s mittpunktsnormal är fältstyrkan störst?

Svar: På avståndet $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ från sträckan $AB\,(= a)$.

148. Genom två långa, rätliniga parallella ledare gå lika starka, likriktade strömmar. Ledarna tänkas vara vinkelräta mot papperets plan, som de genomskära i punkterna A och B. Var på AB:s mittpunktsnormal är fältstyrkan störst?

Svar: På avståndet $\frac{a}{2}$ från sträckan $AB\,(= a)$.

Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna H. T. 1932.

Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. En cirkelsektors hela omkrets är 2 210 mm, och dess yta är 304 704 mm². Beräkna radiens och bågens längder.
2. Genom ena vinkelspetsen i en liksidig triangel har man dragit en rät linje, som delar motstående sida i två delar, vilka förhålla sig som 2 : 3. Beräkna vinklarna i de båda trianglar, i vilka den liksidiga triangeln delas av linjen.
3. Lös ekvationen

$$\frac{\log (8x^3 + 7)}{\log (2x + 1)} = 3.$$

4. För en person hade vid hans födelse placerats ett kapital av 5 000 kr. så, att 4 % årlig ränta tillfördes detsamma. Vid 20 års ålder påbörjade han en 5-årig högskolekurs, och vid början av vart och ett av de 5 studieåren uttog han 2 000 kr. Hur mycket pengar kvarstod vid det femte studieårets slut?
5. En aritmetisk serie består av 20 termer. Summan av alla termerna är 120, produkten av de båda mellersta termerna är 35. Vilken är serien?
6. Beräkna det numeriska värdet av uttrycket

$$10 \cdot 2^a \cdot 2^b + (2^a)^b,$$

då a och b äro rötterna till ekvationen

$$2x^2 + 8{,}17\,x + 6 = 0.$$

7. Kring triangeln ABC, i vilken $AB = 8$ cm, $BC = 26$ cm och $AC = 30$ cm, är en cirkel omskriven. Beräkna längden av den korda, som delar sidorna BC och AC mitt itu.
8. I en cirkel med radien r har man dragit två kordor så, att de skära varandra under 60° vinkel och att deras skärningspunkt delar var och en av kordorna i två delar, som förhålla sig som 1 : 2. Kordornas ändpunkter sammanbindas så, att en fyrhörning erhålles. Beräkna dennas omkrets.

Resultat: 1. Radien och bågen äro 576 mm och 1 058 mm resp. eller 529 mm och 1 152 mm resp. 2. I den ena triangeln 23°,41; 60°

och 96°,59; i den andra 36°,59; 60° och 83°,41. **3.** $x = \frac{1}{2}$. **4.** 2 060 kr. **5.** Serien är $-13; -11; -9; \ldots; +25$; eller omvänt. **6.** 8,589. **7.** $10\sqrt{10} = 31{,}62$ cm. **8.** $5r$ eller $\frac{r}{7}(14\sqrt{3} + 3\sqrt{21})$.

Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. Två vinklars summa är 135°, och summan av deras tangenter är 5. Vilka äro vinklarna?
2. Ett halvklot är inskrivet i en rät cirkulär kon så, att det förras plana gränsyta faller utefter konens basyta. Beräkna förhållandet mellan kropparnas volymer, om konens sida är 2,5 gånger så stor som halvklotets radie.
3. Summan av två tal är a, summan av deras tredje digniteter är $10a^3$. Beräkna summan av deras fjärde digniteter, uttryckt i a.
4. P_1 och P_2 äro två punkter på en hyperbel. Normalerna till kurvan i dessa punkter råka kurvans transversalaxel i punkterna A_1 och A_2. Visa, att mittpunktsnormalen till sträckan P_1P_2 går genom mittpunkten av sträckan A_1A_2.
5. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro givna punkterna A $(-1, -4)$ och B $(-4, +2)$ samt parabeln $y^2 = 16x$. Var på parabeln skall en punkt C väljas, för att triangeln ABC skall få så liten yta som möjligt, och hur stor blir då denna?
6. Undersök, hur antalet skärningspunkter mellan kurvan
$$y = 12x^2 - 4x^3 - 3x^4$$
och räta linjen
$$y = k$$
varierar med värdet på k, och bestäm med tillhjälp härav, hur många positiva och hur många negativa rötter ekvationen
$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + k = 0$$
får för olika värden på k.
7. AOB är en cirkelsektor, där AO och OB äro de radier, som tillsammans med bågen AB begränsa sektorn. Medelpunktsvinkeln AOB är mindre än 120°. Sektorn roterar ett varv kring en genom O gående, i sektorns plan belägen axel, som med bissektrisen till vinkeln AOB bildar 60°. Hur stor skall vinkeln AOB vara, för att den vid rotationen alstrade kroppen skall få en volym, som är en tredjedel av volymen av ett klot med samma radie som sektorn?

8. *a*, *b*, *c* och *d* äro konsekutiva termer i en aritmetisk serie. Uttryck x i b och c eller i a och d, då

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-d}=0.$$

9. *F* är brännpunkt till en parabel, som tangerar räta linjen *t* i *P*. Konstruera (med passare och linjal) den punkt på parabeln, i vilken kurvans normal är parallell med *t*, då endast punkterna *F* och *P* samt den räta linjen *t* äro givna.

Resultat: **1.** $63°{,}43+n\,.\,180°$; $71°{,}57-n\,.\,180°$. **2.** Förhållandet mellan konens och halvklotets volymer är $\frac{5\sqrt{5}}{8}$ eller $\frac{5\sqrt{5}}{4}$. **3.** $31a^4$. **4.** Lägg med samma asymptoter (och samma excentricitet $= e$) en koncentrisk hyperbel, som tangerar kordan P_1P_2, så blir denna tydligen delad mitt itu i tangeringspunkten *P*. Om x-koordinaterna för P_1 och P_2 äro x_1 och x_2 resp., bli motsvarande koordinater för A_1 och A_2 e^2x_1 och e^2x_2 samt för normalens i *P* skärningspunkt $e^2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}$, varmed satsen är bevisad. Generalisering för ett kägelsnitt och y-axeln. **5.** I punkten $(+1;\ -4)$; 6 ytenheter. **6.** $k<0$ (1 neg. + 1 pos.); $k=0$ (1 neg. + 1 pos. samt två rötter $= 0$); $0<k\leq 5$ (2 neg. + 2 pos.); $5<k\leq 32$ (2 neg.); $k>32$ (inga reella rötter). **7.** $45°{,}26$. **8.** $x_1=\frac{b+c}{2}=\frac{a+d}{2}$; $x_{2,3}=\frac{1}{2}[b+c\pm(b-c)\sqrt{5}]=$ $=\frac{1}{6}[3(a+d)\pm(a-d)\sqrt{5}]$. **9.** Drag $FQ\perp FP$. Drag från denna linjes skärningspunkt (Q) med tangenten en linje $QR\perp QP$; QR råkar PF i R, som är den sökta punkten. Konstruktionen kan således ske med enbart vinkelhake.

Uppgifter i fysik.

1. En 10 m lång stege, som väger 60 kg, står upprest mot en vertikal vägg och stöder med sin nedre ände mot ett horisontellt plan på 5 m avstånd från den vertikala väggen. Stegens längdaxel befinner sig i ett vertikalplan, som står vinkelrätt mot väggen. Stegens tyngd tänkes jämnt fördelad efter hela dess längd. Huru stor vikt kan placeras överst på stegen, utan att stegen glider ur sitt läge? Friktionskoefficienten mellan stegen och horisontalplanet är 0,5 och mellan stegen och väggen 0,4.
2. En kula kastas snett uppåt under en elevationsvinkel av 60°. Banan, som under de första sekunderna är stigande, har efter

en sekund en lutning av 45° mot horisotalplanet. Beräkna kastvidden. Accelerationen vid fritt fall är 981 cm/sek².

3. Ett rakt, jämntjockt, 500 mm långt rör, som upptill är slutet, nedtill öppet, är fyllt med fuktighetsmättad luft av + 27° C temperatur och 750 mm tryck omedelbart över ytan av en insjö. Röret nedföres därefter i lodrätt ställning långt under vattenytan till ett sådant djup, att vattnet tränger upp i röret 400 mm över dess nedre ände. Huru djupt under sjöns yta befinner sig då rörets övre ände? Temperaturen vid detta djup är + 4° C, och man kan räkna med att vattnet från ytan och till detta djup har specifika vikten = 1. Vattenångans maximitryck är vid + 27° C 27 mm och vid + 4° C 6 mm. Luftens utvidgningskoefficient är $^1/_{273}$, kvicksilvrets specifika vikt 13,6. Man kan bortse från rörets volymförändring.

4. I en astronomisk tub är objektivets fokaldistans 100 cm, okularets 5 cm. Tuben inriktas mot solen, och okularet inställes så, att genom tuben en tydlig bild av solen erhålles på en skärm, som är uppställd bakom tuben vinkelrätt mot dess optiska huvudaxel på ett avstånd från okularet av 30 cm. Huru stor är diametern hos denna bild, då solens diameter på himlavalvet upptager en synvinkel av 32'?

5. Brytningsgränsen för strålar, vilka infalla från en viss glassort mot en viss vätska, som är optiskt tunnare än glaset, är 60°. Då ljusstrålar av samma slag infalla från vätskan mot luft, är brytningsgränsen 45°. Sök brytningsindex för ifrågavarande glassort.

6. En plankonvex lins, vars buktiga yta har en radie av 184 cm, lägges med den buktiga ytan nedåt på en horisontell, plan glasplatta. Enfärgat ljus infaller rätt uppifrån. En observatör, som håller ögat rätt ovanför linsen, ser Newtons färgringar i reflekterat ljus. Den punkt, där linsens buktiga yta tangerar plattan, synes mörk, och den första mörka ringen har en diameter på 0,22 cm. Beräkna det infallande ljusets våglängd.

7. Polerna N och S till en stavmagnet ha vardera styrkan 150 C. G. S.-enheter; polavståndet NS är 10 cm. Magneten ligger horisontellt, och dess längdriktning NS bildar vinkeln 64° med den magnetiska meridianen. På förlängningen av NS befinner sig en magnetpol P, vars avstånd från den närmast belägna polen S är 30 cm. På polen P verka i horisontalplanet dels jordmagnetismens horisontalkomposant H, dels det magnetiska fält med fältstyrkan F, som alstras av magneten NS.

Resultanten till H och F är vinkelrät mot den räta linjen NSP. Sök värdet på H.

8. I en strömbana äro inkopplade i serie: en ackumulator med konstant elektromotorisk kraft, ett stort motstånd R och ett mindre motstånd r. Parallellt med det senare motståndet kopplas en galvanometer. Strömstyrkan genom galvanometern är densamma, om $R = 4\,000$ ohm och $r = 80$ ohm eller om $R = 2\,000$ ohm och $r = 20$ ohm. Beräkna galvanometerns motstånd. Ingen hänsyn behöver tagas till ackumulatorns och tilledningstrådarnas motstånd.

Resultat: 1. 208,7 kg. 2. 63,41 m. 3. 35,17 m. 4. 4,65 cm. 5. 1,633. 6. 658 $\mu\mu$. 7. 0,1664 gauss. 8. 40 ohm.

Realskolexamen H. T. 1932.

Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\frac{7}{24} - \frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3} + 0{,}8} = \frac{1}{4}.$$

2. En person placerar för sin trotjänarinnas räkning så mycket pengar i svenska statens 4 % obligationer, att hon varje halvår får 300 kr. i ränta. Hur mycket betalar han för dessa obligationer, om kursen är 96,5 %?

3. Ett parallelltrapets $ABCD$, där AB är den större av de parallella sidorna samt AC och BD diagonalerna, är inskrivet i en cirkel. $\angle ADB = 65°$ och $\angle CBD = 35°$. Bestäm trapetsets vinklar.

4. En person har samtidigt utställt tre växlar, en å 250 kr., en å 460 kr. och en å 890 kr., vilka förfalla om en, två och tre månader respektive. På hur lång tid bör en växel lydande å deras sammanlagda belopp utställas för att vid omedelbar diskontering ge samma nettobelopp som de förra tillhopa? Diskonten beräknas i samtliga fall efter $5\,{}^1/_2$ %.

5. Förenkla uttrycket

$$\left(\frac{x+y}{y} - 2\right)^4 \left(\frac{x^2}{x^2 - y^2} - 1\right)^2.$$

6. En liksidig triangel med sidan 6 cm är given. Med vår och en av vinkelspetsarna till medelpunkt uppritas en cirkelbåge, som förenar de två andra vinkelspetsarna. Därigenom uppkommer en triangelliknande figur med de tre cirkelbågarna som sidor. Beräkna denna figurs yta. ($\pi = 3{,}14$.)
7. I triangeln ABC är sidan AB 10 cm, sidan BC 8 cm, vinkeln A 30° och vinkeln C spetsig. DE är en transversal, dragen parallell med AC på avståndet 3 cm från denna sida. Beräkna ytan av parallelltrapetset $ACED$.
8. För att bestämma den inre diametern av ett smalt, jämntjockt glasrör har man infört en liten kvicksilverpelare, som i röret intager en längd av 18,9 mm. Kvicksilverpelarens vikt befinnes vara 66 mg. Beräkna rörets inre diameter. (Kvicksilvrets spec. vikt $= 13{,}6$. $\pi = 3\frac{1}{7}$.)

Resultat: **1.** $x = 30$. **2.** 14 475 kr. **3.** 75° och 105°. **4.** 72 dagar (uppgiften om diskontoprocenten obehövlig). **5.** $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$. **6.** $18(\pi - \sqrt{3}) = 25{,}3$ cm². **7.** $10{,}5\sqrt{3} + 2{,}1\sqrt{39} = 31{,}3$ cm². **8.** 0,57 mm.

(Forts. från sid. 240).

Matematisk Tidsskrift. København 1932, h. 3—4.

Ur innehållet i avd. **A.** Fr. Fabricius-Bjerre, Elementærgeometri V, Det firdimensionale rum. — David Fog, Elementærgeometri VI, Sfærisk geometri. — Litteraturanmeldelser. — Danske Eksamensopgaver. Ur avd. **B.** Harald Bohr og Børge Jessen, To nye simple Beviser for Kroneckers Sætning. — B. Jessen, Eine Integrationstheorie für Funktionen unendlich vieler Veränderlichen etc. — Werner Fenchel, Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktssätze. — Litteraturanmeldelser.

Fysisk Tidsskrift. København 1932, h. 4.

Ur innehållet. H. Hansen, Statsmeteorolog Dr. phil. J. N. Nielsen. — H. A. Kramers, Virkelighed og Begrebsdannelse. — Helge Petersen, Om Jordmagnetisme. — A. Menzinger, Differential-Lufttrycksmaalinger. — Danske Eksamensopgaver.

Norsk Matematisk Tidsskrift. Oslo 1932, h. 3.

Ur innehållet. Viggo Brun, Gauss' fordelingslov. — Filip Karlsen, En opgave. — Bokanmeldelser. — Opgaver til løsning. — Løste opgaver.